GRAPHEN UND SEKANTEN

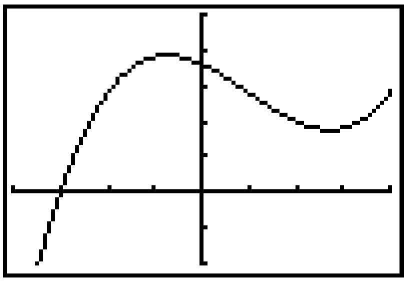
Von vielen Funktionsgraphen, etwa Potenzfunktionen oder der sinus-Funktion kann man auf naive Weise sagen, dass sie in einem beliebigen Punkt eine Tangente bzw. eine Steigung (eben dieselbe Steigung wie diese Tangente) besitzen. Um dies mit dem ti-84 näher zu untersuchen, erarbeiten wir die notwendigen Schritte zunächst an einem Einführungsbeispiel und übertragen das Verfahren dann auf weitere Graphen.

Einführungsbeispiel:

Wir untersuchen die Steigung des nebenstehenden Graphen in unterschiedlichen Punkten. Dabei gehen wir in mehreren Schritten vor:

- o Zunächst berechnen wir eine Sekantensteigung für einen einzelnen Punkt.
- o Danach berechnen wir Sekantensteigungen für verschiedene Punkten.
- o Diese Steigungen stellen wir als Punktplot dar.
- o Abschließend ergänzen wir eine Funktion, die zu beleibeigen x-Stellen Sekantensteigungen angibt.

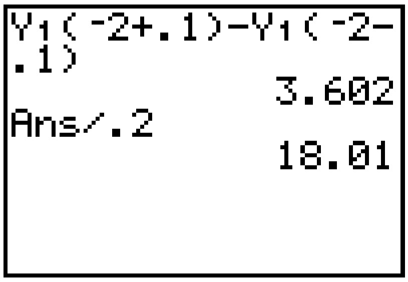
$f(x) = (x + 3)^2(x^2 - 6x + 12)$



$-4 < x\ 4$
$-20 < y\ 50$

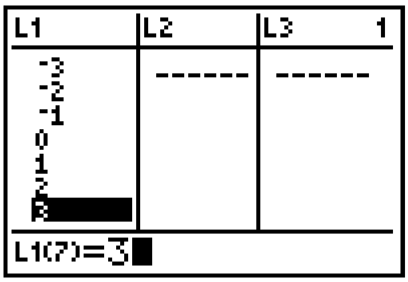
Schritt 1: Geben Sie die Funktion im y-Editor [Y=] als Y1 ein. Plotten Sie die Funktion. (mögliches Ergebnis: s.o.)

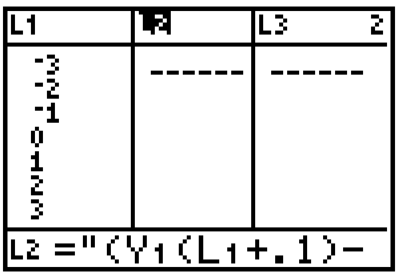
Schritt 2: Bestimmen Sie die Steigung an der Stelle $x_0 = 1$ näherungsweise, indem Sie die in einem „kleinen" Intervall (Länge z.B. 0.2 oder 0.4) die durchschnittliche Steigung berechnen.
Für $x_0 = -2$ sehen Sie rechts eine Beispielrechnung. Den Namen der Funktion Y1 *müssen* Sie aus dem Untermenü [VARS] `Y-VARS 1:Function 1:Y1` (zum Schluss mit [ENTER] bestätigen) holen!

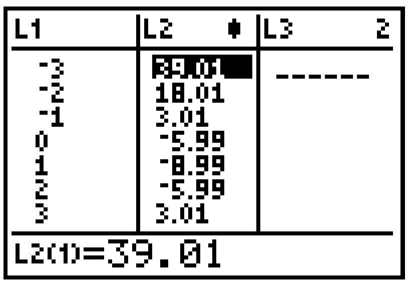


Schritt 3: Mit Hilfe des Listeneditors können wir diese Rechnungen parallel für viele Stellen durchführen. Wir greifen dabei auf die schon in Schritt 2 benutzte Berechnungsvorschrift zurück.

Wir öffnen den Editor mit [STAT] `1:Edit`. In L1 geben wir die Stellen ein, an denen wir die Sekantensteigungen berechnen wollen. In L2 führen wir dann die Berechnungen durch. Auf die Werte aus L1 verweisen wir, indem wir L1 in den Term schreiben. Der ti-84 arbeitet hier wie eine Tabellenkalkulation. Wie Y1 muss auch L1 aus einem Untermenü geholt werden: Es ist [LIST].

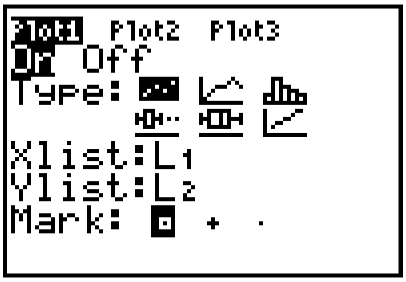


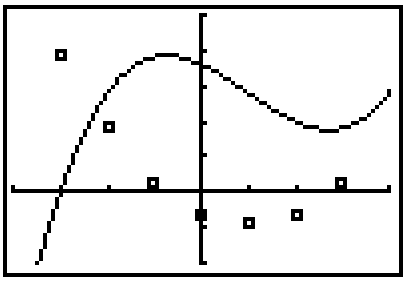




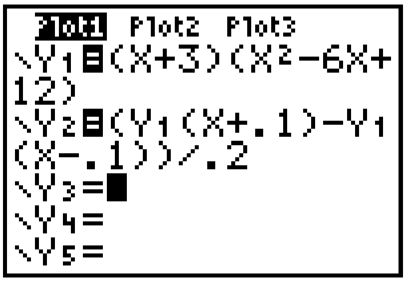
Technische Anmerkung: Die Definition für L2 schreiben wir in Anführungsstriche. Dann erkennt der ti-84, dass er sie sich merken soll: Bei neuen Werten in L1 (oder einer Veränderung von Y1) berechnet der Rechner sofort die neuen Werte. Tun wir das nicht, berechnet er nur die Werte (linker screenshot). Neue Wert in L1 oder Y eine Veränderung von Y1 interessieren ihn dann nicht.

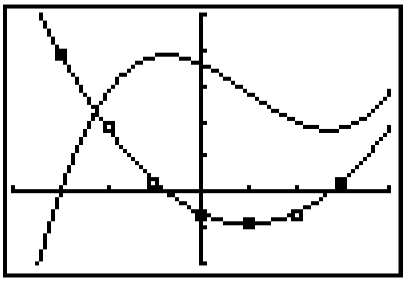
Schritt 3: Nun plotten wir die Punkte. Im Idealfall sind die Werte so, dass man sie sogar gemeinsam mit der Ausgangsfunktion in éinem Graphikfenster plotten kann. Wir rufen das Menü [STAT PLOT] auf, stellen einen Plot an, wählen den Graphiktyp aus, nennen die Quellen, aus denen x- und y-Werte geholt werden und wählen einen Typ für die Punktdarstellung. *Kontrolle*: Passen die waagerechten Tangenten der Ausgangsfunktion zu den berechneten Werten der Sekantensteigungen?





Schritt 4: Abschließend ergänzen wir die Funktion Y2, die zu jedem x-Wert eine Sekantensteigung (mit vorgegebener Intervall-Länge) angibt.





Technische Anmerkung: Im y-Editor geben wir die Variable X ein, nicht L1.

Untersuchungsauftrag:

a) Untersuchen sie die folgenden vier Funktionen in derselben Weise wie das Einführungsbeispiel. Halten sie das Ergebnis, insbesondere den Verlauf von Y2, auf dem Beiblatt fest.

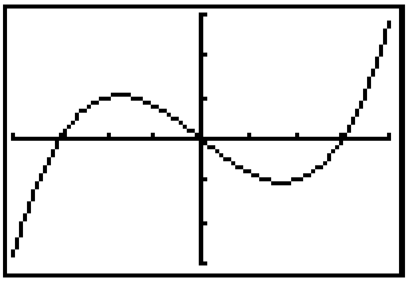
$f_1(x) = x\ (x+3)\ (x-3)$
$f_2(x) = (x+3)^2\ (x-3)^2$
$f_3(x) = x^3\ (x+3)\ (x-3)$
$f_4(x) = (x+3)^2\ (x^2-6x+12)$

b) Wenn Sie alle vier Graphen behandelt haben, vergleichen Sie die f_i mit ihren jeweiligen „Steigungsgraphen“ f_i^* (bzw. Y1 mit Y2). Notieren Sie Zusammenhänge und versuchen sie, diese zu begründen.

ARBEITSBLATT:

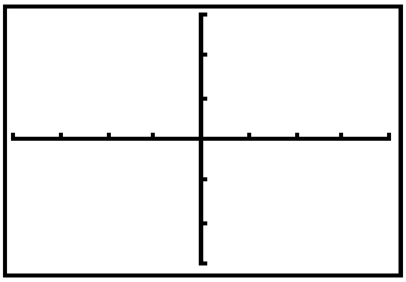
<table>
<tr>
<td>

$f_1(x) = x\,(x+3)\,(x-3)$



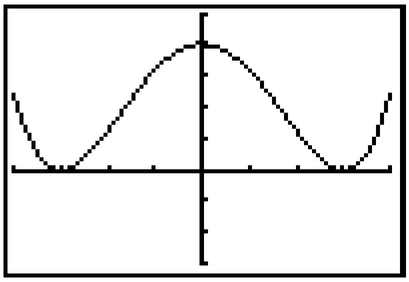
$-4 < x < 4$
$-30 < y < 30$

f_1^*



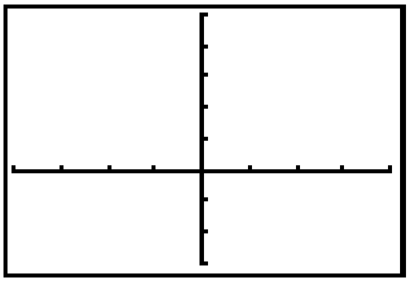
</td>
<td>

$f_2(x) = (x+3)^2\,(x-3)^2$



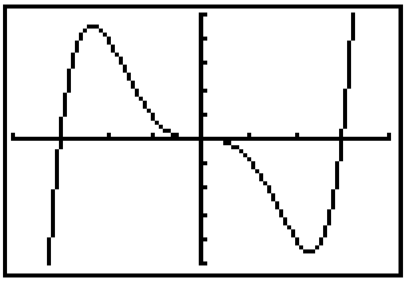
$-4 < x < 4$
$-60 < y < 100$

f_2^*



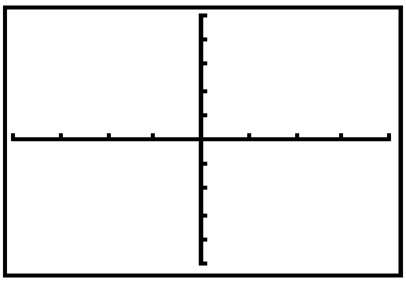
</td>
</tr>
<tr>
<td>

$f_3(x) = x^3\,(x+3)\,(x-3)$



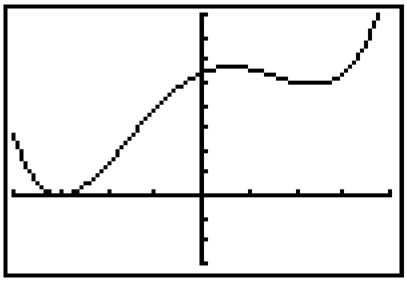
$-4 < x < 4$
$-50 < y < 50$

f_3^*



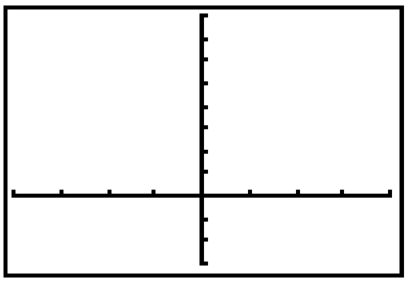
</td>
<td>

$f_4(x) = (x+3)^2\,(x^2 - 6x + 12)$



$-4 < x < 4$
$-60 < y < 160$

f_4^*



</td>
</tr>
</table>