HiDiMa

Historische Dimension des mathematischen Verstehens:

Lektüre mathematischer Quellen in den Sekundarstufen I und II

Al – Khwarizmi:

Kurzgefasstes Buch über das Rechnen durch Vervollständigen und Ausgleichen

Bernd Reckelkamm

Helmholtz – Gymnasium, Bielefeld

Inhalt

Die wesentlichen Informationen stammen aus den Materialien, die im WS 1994/95 im Arbeitskreis „Mathematikgeschichte für Lehrer“ von Herrn Jahnke ausgegeben wurden. Einige ergänzende Bemerkungen sind dem Buch „Von Pythagoras bis Hilbert“ von Egmont Colerus entnommen (rororo 6696/6697).

Zeitgenössischer Kontext

Zu den bedeutendsten Ereignissen der Weltgeschichte zählt die Expansion der Araber im 7./8. Jahrhundert. In knapp 1 ½ Jahrhunderten eroberten sie ein Reich, das sich von Spanien bis zum heutigen Pakistan erstreckte. Sie übernahmen, verarbeiteten und entwickelten das Kulturgut der eroberten Gebiete und verschmolzen so babylonische, griechische, indische und chinesische Traditionen. Ein wichtiger Ort, an dem dieses geleistet wurde, war das um 830 in Bagdad vom Kalifen al-Mamun gegründete Haus der Weisheit, das eine Bibliothek und ein Observatorium umfasste. Dort wurden Übersetzungen aus dem Indischen, Chinesischen und Griechischen in die arabische Amtssprache angefertigt, und dort arbeitete auch Al-Khwarizmi. Im Vorwort zu dem in diesem Projekt behandelten Werk nimmt er ausdrücklich auf die ausgezeichnete Stellung von al-Mamun Bezug.

Vergleicht man den wissenschaftlichen Standard, den die islamische Welt zu diesem Zeitpunkt erreicht hatte, mit dem des christlichen Mitteleuropa, so zeigt sich deutlich die Überlegenheit und der Vorsprung des Orients. In einer Zeit, in der „The Clash of Cultures“ (Huntington) zu einem geflügelten Wort gerät, dürfte es sinnvoll sein, in einer 9. Jahrgangsstufe derartige welt- und wissenschaftsgeschichtliche Verschiebungen zumindest aufzuzeigen.

Das folgende Datengerüst mag die historische Einordnung erleichtern:

570 – 632	Mohammed der Prophet
732	Schlacht zwische Tours und Poitiers; stoppt das weitere Vordringen der Araber im Westen
754 – 775	Kalif al-Mansur; begründet den Aufstieg der islamischen Kultur, besonders durch die ...
762	... Gründung Bagdads
780 – 850	Al-Khwarizmi
786 – 809	Kalif Harun al-Raschid; bekannt aus 1001 Nacht; führt das islamische Reich auf den Höhepunkt seiner Macht
813 – 833	Kalif al-Mamun, Sohn des Harun al-Raschid; fördert den Aufstieg der Wissenschaften, gründet ...
um 830	... das „Haus der Weisheit“
9./10.Jhd.	politische Entmachtung der Kalifen
1258	Eroberung Bagdads durch die Mongolen; damit Verlust des äußeren Symbols der Einheit des Islams

Autor

Abu Abd Allah Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi (780 – 850) – kurz: AK – stammt aus Choresm (arab. Khwarizmi). südlich des Aralsees, heute Teil von Usbekistan und Turkmenistan. Für seinen Namen sind mehrere Schreibweisen gebräuchlich, z.B. *Alhwarizmi, Al-Hwarizmi, al-Khowarizmi* oder auch *Mohammed ben Musa.* Er verfasste Bücher, die den Bereichen Algebra, Astronomie und Geographie zugeordnet werden können, sowie Werke über indische Ziffern und den Jüdischen Kalender.

Das Wort „al-dschabre“ erscheint bei AK erstmals urkundlich in mathematischem Zusammenhang. Über zahlreiche Zwischenstufen entwickelte sich daraus das Wort „Algebra“. AK hat die Bedeutung des Wortes nicht näher erläutert. Im Zusammenhang mit dem Titel des Buches (s.u.) darf man es im Sinne von Auffüllen/ Vervollständigen deuten. Damit entspricht es in etwa dem modernen Quadratischen Ergänzen. AK den „Vater der Algebra“ zu nennen, verzerrt seine Leistung jedoch, da sein Buch inhaltlich an ältere Traditionen, etwa Diophant und Euklid, anknüpft. Insbesondere fehlt ihm völlig die modernere Buchstaben-Schreibweise.

Andererseits ist das Kalkülhaft-Algorithmische seiner Schrift deutlich erkennbar. Insofern ist es nicht nur eine wortgeschichtliche Zufälligkeit, wenn aus der Verballhornung seines Geburtsortes das Wort „Algorithmus“ wurde. Hintergrund könnte sein, dass eines der Werke AK’s mit den Worten „Al-Khwarizmi dicit“ („Also spricht Al-Khwarizmi“) begann. [Das Diagonalisierungsverfahren von Gauß hätte auf ähnliche Weise den Namen „Braunschweiger“ bekommen können – ein netter Vergleich von Herrn Colerus.]

Quelle

Der Titel von AK’s bekanntestem Buch lautet:

> *Al-Kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabre w’al-mukabalah,* frei übersetzt: *Kurzgefasstes Buch über das Rechnen durch Vervollständigen und Ausgleichen*

Die für diese Reihe angefertigte deutsche Übersetzung benutzt als Ausgangspunkt

> *The Algebra of Mohammed ben Musa. Edited and translated by Frederic Rosen, London 1831.*

An der folgenden Inhaltsübersicht wird die Mischung aus systematischem Interesse und Anwendungsorientierung deutlich. Die Anwendungsorientierung wird in dem Textauszug, der dieser Reihe zugrunde liegt, jedoch keine Rolle spielen.

(führt zum großen Teil auf <u>lineare</u> Gleichungen und Dreisatzsituationen)

2 Sachanalyse: AK's Technik des Lösens quadratischer Gleichungen

Der vorliegende Textauszug liefert ein Verfahren, gemischtquadratische Gleichungen zu lösen. Dieses Verfahren ähnelt sehr stark dem aus der Sekundarstufe I bekannten Verfahren der Quadratischen Ergänzung bzw. der sog. pq – Formel. Im großen Unterschied zur heutigen Betrachtungsweise kennt AK jedoch keine algebraische Schreibweise in unserem Sinn: Er beschreibt ausführlich die Zahlenmanipulationen. Die Begründungen dafür, dass seine Verfahren korrekte Ergebnisse liefern, sind ausschließlich geometrischer Art. In der Folge ist AK's Analyse irrationaler Lösungen unübersichtlicher als die „moderne" Betrachtung der Diskriminante.

Den systematischen Hauptteil des Buches – neben der Aufgabensammlung, s.o. §1 – bildet die Diskussion linearer und quadratischer Gleichungen in einer Unbekannten. AK ordnet die Gleichungen so an, dass keine Minuszeichen entstehen und kommt zu den folgenden sechs Fällen:

$ax^2 = bx$	$ax^2 = b$	$ax = b$
$ax^2 + bx = c$	$ax^2 + c = bx$	$ax^2 = bx + c$

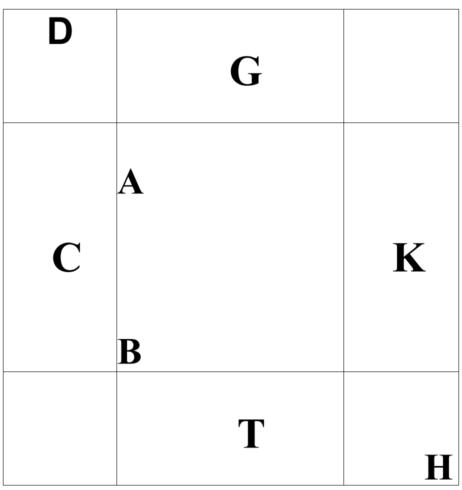
Das erste im Unterricht vorgestellt Beispiel lautet in moderner Schreibweise $x^2 + 10x = 39$. Das für die Klassenarbeit vorgesehene Beispiel hat die Form $x^2 + 21 = 10x$. Die anderen Fälle werden in dieser Reihe nicht behandelt.

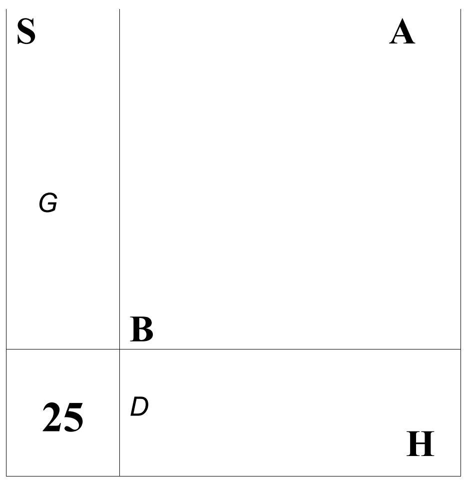
AK gibt verbale Regeln für das Auffinden der Lösungen an und illustriert sie durch Zahlenbeispiele. Die Richtigkeit seiner Ergebnisse zeigt er durch geometrische Konstruktion. Hier zeigt sich u.U. der Einfluss Euklids und dessen in griechischer Tradition stehender Auffassung von Mathematik als einer beweisenden Wissenschaft. Die moderne Buchstabensymbolik kannte AK noch nicht. Zwar vereinigte er griechische, babylonische und indische Überlieferungen und ist allgemeiner als seine Vorgänger. Zur vollen Allgemeinheit fehlen ihm aber noch immer die Zulassung negativer Koeffizienten und Lösungen, die Benutzung der Zahl Null und die allgemeine Zweideutigkeit der Quadratwurzel.

Für das im Unterricht zentrale Beispiel $x^2 + 10x = 39$ liefert AK die folgende Lösung. Sie wird hier – genau wie im Unterricht, s.u. §6 – in ein Flussdiagramm übersetzt:

$$10 \xrightarrow{:2} 5 \xrightarrow{\text{hoch}\,2} 25 \xrightarrow{39+} 64 \xrightarrow{\sqrt{\ }} 8 \xrightarrow{-5} 3$$

Als gesuchtes x ergibt sich die Zahl 3. Man erkennt deutlich, an welcher Stelle „negative Wurzeln" <u>nicht</u> thematisiert werden. Für den geometrischen „Beweis" liefert AK zwei Versionen. Sie benutzen die folgenden Ausgangssituationen:





Das x^2 entspricht im linken Bild dem Quadrat AB (Schreibweise der englischen Ausgabe). Die zu addierenden 10x werden in 4 Teile zerlegt und an jeder der 4 Quadratseiten angelegt. Offensichtlich entspricht dieses Vorgehen nicht dem Flussdiagramm: Dort werden die 10x nur in zwei Teile zerlegt. Daher liefert AK einen zweiten Beweis, der dieses berücksichtigt. Im rechten Bild werden an das Ausgangsquadrat AB die zwei Stücke G und D mit den Abmessungen $5 \cdot x$ angelegt. Ohne das kleine Eckquadrat ($5 \cdot 5 = 25$) hat man damit 39 Einheiten, mit dem Eckquadrat sind es 64. Als Kantenlänge ergibt sich 8, abzüglich der 5 (Kantenlänge G bzw. D) erhält man die schon bekannte 3.

Der für die Klassenarbeit vorgesehen Fall verläuft nach einem ähnlichen Muster. Dort gibt es noch eine Variante, die auf eine <u>zweite</u> Lösung führt. Allerdings fehlt die moderne übersichtlich-allgemeine Darstellung mittels der Diskriminanten.

3 Didaktische Analyse

Die Unterrichtssequenz wird auf einen Fall reduziert, ein zweiter Fall wir der Teil der Klassenarbeit. Im Zentrum steht das Selber-Erlesen des Textes durch die Schüler. Dies wird unterstützt und gesteuert durch Übersetzen des AK-Textes in ein Flussdiagramm. Den geometrischen Beweis werden die Schüler ebenfalls durch AK kennenlernen: Das Selber-Entdecken steht in dieser Sequenz nicht im Vordergrund. Die selbständige Übertragung des Gelernten wird Teil der Klassenarbeit: Dort wird das Beweisbild – für den zweiten Fall - von den Schüler ermittelt. Umrahmt wird die mathematische Sequenz von zwei Stunden zu Leben und Zeit des AK. In diesem Rahmen sollen die Schüler eine Zeitleiste rund um die Lebensdaten AK's erstellen. Den Abschluss bildet ein Blick in das Vorwort zu AK's Buch.

Bemerkungen zur Lerngruppe

Die Gruppe besteht aus 29 Schülerinnen und Schülern (im folgenden nur noch kurz: Schüler). Sie bilden eine „normale" Klasse der 9.Jahrgangsstufe, mit einigen sehr motivierten und leistungsstarken Schülern, aber auch mit einer ganzen Reihe von Schülern, denen die Mathematik eher schwer fällt. Dies ist auch bei den vier Wiederholern der Fall. Das Mitarbeitsverhalten ist insgesamt geprägt von einer kleinen Gruppe von sehr regen, dabei nicht unbedingt leistungsstarken Schülern, einer weiteren Gruppe, die auf Ansprache offen reagiert und einer recht umfangreichen Gruppe, die sowohl im Unterricht als auch in der häuslichen Arbeit sehr nachlässig ist. Also, wie schon festgestellt, eine normale Lerngruppe der Jahrgangsstufe 9.

Stellung der AK-Sequenz im Unterricht

- Die AK-Sequenz ist für die Klasse 9 im Anschluss an die Herbstferien geplant. Sie liefert den Einstieg in das Thema „Quadratische Gleichungen". Im Zusammenspiel von geometrischen, algebraischen und historischen Aspekten wird die systematische Behandlung der quadratischen Gleichungen vorbereitet: allgmeine quadratische Ergänzung, pq-Formel. Den - vorläufigen - Abschluss der Gesamtreihe bilden weitere Anwendungen von quadratischen Gleichungen. Parabeln nehmen das Thema im zweiten Schulhalbjahr wieder auf.

Schwerpunkte für die Detailplanung

- Historische Elemente stehen im Mathematikunterricht in der Regel eher am Rande. Sie tauchen zwar im Zusammenhang von Sätzen oder Verfahren auf (Heron, Pythagoras), allerdings wird der historische Aspekt normalerweise nicht vertieft. Hier soll die AK-Sequenz eine Alternative darstellen.

- Der Standardzugriff auf die Mathematik blendet normalerweise aus, dass Mathematik „kulturübergreifend" betrieben wird. Zwar werden in der fünften Klasse die Babylonier kurz erwähnt, doch danach spielt sich Mathematik eher in einem kulturfreien Raum ab. Die AK-Sequenz bietet die Möglichkeit einerseits aufzuzeigen, welche Rolle die Wissenschaften im arabischen und damit nicht-christlichen Mittelalter spielten. Andererseits zeigt sich beim Lesen des Vorwortes zu AK's Buch deutlich, wie tief verwurzelt ein Wissenschaftler im kulturellen Umfeld seiner Zeit ist, unabhängig vom konkreten Fall AK's.

- AK's Buch ist zwar Namensgeber für die moderne Algebra, aber sein Buch kann als algebrafrei i.e.S. angesehen werden. Überführt man AK's Schreibweisen in eine moderne algebraische Schreibweise, nimmt man dann seine geometrischen Beweise hinzu, so lassen sich auf naheliegende Weise <u>Zusammenhänge zwischen Geometrie und Algebra</u> thematisieren.

- In diesem Rahmen ergibt sich zwanglos, welche <u>Vorteile eine moderne algebraische Notation</u> hat: Sie ist kurz, bündig und verhilft zu Verallgemeinerungen (pq-Formel), die in AK's Schreibweise kaum zu realisieren wäre. Dies mag gerade in der 9. Klasse ein Korrektiv gegen den bisweilen erkennbaren Algebraverdruss sein.

- Im Rahmen der Übersetzung von AK's Schreibweise in die uns geläufige kann auch die Frage nach <u>negativen Lösungen</u> zum Thema werden. Für AK existieren negative Zahlen nicht, daher werden diese Fälle auch nicht thematisiert. Unsere eigene Schreibweise und die Behandlung negativer Zahlen seit der 7. Klasse zeigen zum einen unsere von AK abweichende „Ontologie“ – Was gibt es? – auf. Zum anderen gestattet die Analyse allgemeiner quadratischer Gleichungen mit Hilfe der Diskriminante und der negativen Zahlen eine umfassende, abschließende und dabei übersichtliche Behandlung dieses Themas.

Auswirkung auf die Planung der Stunden

- Das Zusammenspiel von Algebra und Geometrie bereitet Schülern i.a. Probleme. Um diese Problem nicht mitten in der AK-Sequenz zu bekommen, wird in zwei vorbereitenden Stunden sowohl auf quadratische Gleichungen als auch auf deren geometrische Veranschaulichung hingearbeitet. In diesem Rahmen wird auch die Frage nach algebraischen Lösungen diskutiert, die sich der geometrischen Situation nicht sofort ansehen lassen. Diese beiden Stunden finden zeitlich getrennt von der Restsequenz noch <u>vor</u> den Herbstferien statt.

- Um den Schülern einen Eindruck der Bandbreite möglicher Darstellungen desselben bzw. sehr ähnlicher Sachverhalte zu geben, wird AK's Text in ein Flussdiagramm umgewandelt. Diesem schließt sich unsere moderne algebraische Schreibweise an. Zudem sollen die Schüler auch selber Rechenvorschriften „im Stile AK's“ schreiben.

- Die historische Einordnung erfolgt zu Beginn durch den Fachlehrer. Daran schließt sich jedoch ein mittelfristiger Arbeitsauftrag für die Schüler an: Sie sollen Material für eine Zeitleiste rund um die Lebensdaten AK's sammeln. Dies mag man als Fachübergriff in Richtung Geschichte ansehen. Zumindest bietet es auch den in Mathematik nicht so leistungsstarken Schülern eine neue Möglichkeit, sich in den Unterricht einzubringen.

- Um den kulturübergreifenden Aspekt herauszustellen, soll das Vorwort zu AK's Buch gelesen werden. Es ist für das Sachproblem völlig nebensächlich, sondern bezieht sich ausschließlich auf das religiöse, kulturelle und wissenschaftsgeschichtliche Umfeld AK's. Ebenso wie in dem vorangehenden Punkt werden hier Leistungsreserven der Schüler angesprochen, die im „normalen“ Mathematikunterricht kaum eine Rolle spielen.

- AK'S Verfahren sowie die Begründung der Korrektheit sollen hier nur exemplarisch behandelt werden. Daher wird im Unterricht nur der erste Fall behandelt. Der zweite Fall ist das Modell für das Problem der beiden Vorbereitungsstunden. Dieser Fall wird in der Klassenarbeit wieder auftauchen, dann allerdings in der Originalversion von AK.

- Der Text zum AK'S erstem Fall wird auf drei Arbeitsblätter verteilt: zunächst das Rechenverfahren, dann der erste Beweis, danach der zweite (s. dazu §§15-17, Anhänge III – V). Dies soll die Scheu vor der Textmenge und dem doch recht ungewöhnlichen Stil reduzieren.

- Im Rahmen der Detailplanung während der Durchführung der Reihe ergab es sich, dass der 2. Beweis (§17, Anhang V) nicht am Originaltext, sondern im Unterricht von den Schülern selbst erarbeitet wurde (vgl. §8, Vorüberlegungen).

Anhand eines geometrischen Grundproblems wird das Zusammenspiel von geometrischer Situation und algebraischer Beschreibung geübt. Dies bezieht sich sowohl auf die Beschreibung des Problems, als auch auf die Lösung und die „Methodenkritik“: Die algebraische Beschreibung liefert zwei Lösungen, wobei die zweite erst im nachhinein geometrisch gedeutet wird. Vor diesem Hintergrund sollte es den Schülern leichter fallen, AK’s textlastige Ausführungen nachzuvollziehen.

Planung

Das Arbeitsblatt zu den vorbereitenden Stunden findet sich in §13, Anhang I.

Ausgangspunkt ist AK’s zweiter Fall: $x^2 + 16 = 10x$. Den Schülern wird eine geometrische Situation vorgestellt, die diesem algebraischen Problem und auch der Sichtweise AK’s entspricht. Aufgabe im Unterricht ist es, dieses Problem zu lösen, und zwar sowohl durch Flächenvergleich als auch durch rein algebraische Manipulation. Der erste Weg entspricht dem Verfahren AK’s.

Um den Schülern die geometrische Lösung zu erleichtern, wird ein „p/2 – Raster“ in die Aufgabenstellung eingebaut. Der erste Schritt, den AK vorgibt, ist damit schon getan. Die weiteren Schritte müssen sich nicht an AK orientieren. Er steht hier nur im Hintergrund.

Nach der geometrischen Lösung soll auch eine Übertragung in algebraische Schreibweisen stattfinden. Im Unterrichtsgespräch werden die Einzelschritte der geometrischen Lösung herausgestellt und in algebraische Schreibweise gebracht. Dann wird versucht, von der Ausgangsgleichung herkommend, durch geeignete Term- und/oder Äquivalenzumformungen eine Lösung zu finden, bei der die Elemente der geometrischen Lösung wiedererkennbar sind. Der Weg entspricht der üblichen quadratische Ergänzung. Zusätzlich zur schon bekannten Lösung (x = 2) wird sich aber auch eine neue Lösung (x = 8) ergeben. Auch diese Lösung ist geometrisch gut nachvollziehbar: Statt von der Kästchengrenze 5 um 3 Einheiten nach links zu gehen (5 – 3), geht man 3 Einheiten nach rechts (5 + 3). Diese Zweideutigkeit der Lösung entspricht dem pq-Term $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$.

Verlauf

Die geometrischen Manipulationen wurden von allen Schülern mutig angegangen, allerdings hielt der Mut bei einigen nicht lange an. Sie benötigten kleine Tips, soweit sie sich nicht bei ihren Nachbarn mit Hinweisen versorgten. (Die Sitzordnung in Sechsergruppen ermöglicht problemlos die Arbeit mindestens zu zweit.) Die leistungsstarken Schüler, aber nicht nur diese, kamen selbständig auf die Lösung und konnten diese auch am OHP vorstellen.

In der Folgestunde wurde die geometrische Lösung nochmals analysiert (OHP!), das algebraische Kernstück an der Tafel festgehalten:

$$\begin{array}{lllll} \text{I} & b^2 & = & 9 \\ & (5 - a)^2 & = & 25 - 16 \\ \\ \text{II} & a^2 + 16 & = & 10a \end{array}$$

I ergibt sich aus dem geometrischen Lösungsweg, II ist die algebraische Beschreibung der Ausgangsaufgabe. Das folgende Unterrichtsgespräch sollte den Zusammenhang zwischen I und II herausstellen, genauer: Wie kommt man auf algebraisch übersichtliche Weise von II nach I und damit dann ans Ziel? Dieses Gespräch war etwas zäh, da es eine ganze Anzahl an algebraischen Lösungsstrategien erfordert: Sortieren nach Potenzen von a, Binomische Formel ansteuern, dazu passendes Quadrat ergänzen, negative Lösung beim Radizieren im Auge behalten.

Reflexion

Die beiden Stunden könnten auch unabhängig von AK zur Einführung in quadratische Gleichungen dienen. Die wechselseitige Interpretation Geometrie – Algebra hat gut funktioniert. Nach Abschluss der Gesamtreihe fällt auf, dass eine Reihe von Schülern immer noch Schwierigkeiten mit der „Dimension von Termen“ hat: Produkte werden i.a. als Flächen, Einzelzahlen bzw. alleinstehende Variablen als Längen gedeutet. Offensichtlich war dieser Aspekt auch in diesen Vorbereitungsstunden nicht tief genug verstanden worden, vom regulären Unterricht ganz zu schweigen.

5 1. Stunde

Ein „nachgebauter Foliant“ mit arabischen Buchstaben soll die Schüler zu Beginn der Stunde aus dem üblichen Unterrichtsklima herausreißen. Der Lehrer stellt das Thema der folgenden Stunden vor, insbesondere AK und einige Elemente seiner Biographie. Die Schüler erhalten in diesem Zusammenhang eine längerfristige Hausaufgabe, welche die Zeitleiste vorbereiten soll, die die Sequenz abschließen wird. Im zweiten Teil der Stunde lernen die Schüler den ersten Text von AK kennen.

Vorüberlegungen

Aufgabe dieser Stunde ist die Einführung in die AK-Sequenz. Dabei sollen die Schüler ihren Standardblick auf Gegenstände des Mathematikunterrichts aufgeben und sich auf eine historische Betrachtung einlassen. In diesem Zusammenhang steht auch der Auftrag, Material aus dem historischen Umfeld AK's zu suchen. Die Einführung soll inhaltlich sowohl das zeitliche Umfeld AK's ansprechen als auch eine erste Begegnung mit dem Text ermöglichen.

Phasenplanung

1 Einstieg: L. stellt „arabische Originalhandschrift“ aus dem 9.Jhd. vor. Es handelt sich um ein völlig ungeschichtliches, aber äußerst dickes Buch, das mit braunem Packpapier eingewickelt ist und „arabische“ Schriftzeichen trägt. Letztere sind stilecht von rechts nach links auf der „falschen“ Seite des Buches aufgemalt. Im offenen Gespräch werden Meinungen der Ss. gesammelt, worum es sich handeln könne. Ziel ist eine erste Idee davon, dass es sich um ein „sehr altes“ Mathematikbuch handeln könnte.

2 Erarbeitung 1: Die Ss. untersuchen „quer Beet“ ihre bisherigen Kenntnisse zur Geschichte der Mathematik. Dies kann sich auf den Unterricht beziehen, aber auch auf außerunterrichtliche Begegnungen mit der Geschichte der Mathematik oder Wissenschaften. Zu denken wäre hier an Namen wie Pythagoras, Euklid, Heron, Eratosthenes (?), die Babylonier, die Römer...

3 L-Info: L. löst das Rätsel um den „Folianten“ auf: Unterstützt von einer Folie (s. dazu §14, Anhang II: Folie zur 1. Stunde) wird die Person AK vorgestellt sowie eine knappste Einordnung in das geschichtliche Umfeld vorgenommen. In diesem Zusammenhang wird auch die Wortgeschichte „Algebra“ und „Algorithmus“ angesprochen.

4 Mittelfristige Hausaufgabe: Um einen Eindruck von den Zeitumständen zu AK's Lebenszeit zu bekommen, sollen die Ss. in den folgenden 1½ Wochen sechs zeitgeschichtliche Ereignisse heraussuchen und auf DIN A7 Kärtchen notieren. Diese Kärtchen können dann verglichen, sortiert und als Zeitleiste an einer Pinwand befestigt werden (s. dazu §9, 5./6. Stunde). Der Arbeitsauftrag findet sich ebenfalls auf der schon benutzten Folie.

5 Erarbeitung 2: Die Ss. erhalten das Arbeitsblatt mit dem ersten Teil des AK-Textes (s. dazu §15, Anhang III: Arbeitsblatt zu AK's Rechenverfahren). Die „Vorbemerkungen“ gibt L. als Info vorweg, zu bearbeiten sind zunächst nur die 1. und 2. Aufgabe. Den Abschluss dieser Phase sollte die Standardnotierung des algebraischen Problems bilden: Löse $x^2 + 10x = 39$.

6 Hausaufgabe zur nächsten Stunde: Arbeitsblatt, 3.und 4. Aufgabe.

Verlauf

Der geplante Ablauf wurde im wesentlichen beibehalten. Die Abfolge der einzelnen Phasen ergab sich in der Unterrichtssituation auf unangestrengte Weise. Der zeitliche Rahmen erwies sich als großzügig, sodass sogar schon Flussdiagramme an der Tafel festgehalten werden konnten (Arbeitsblatt, 3. Aufgabe). Die Schüler haben in allen Phasen mitgearbeitet, durchaus mit eigenständigen und z.T. überraschenden Beiträgen. Eine Zurückhaltung wegen der ungewohnten Situation (ein offenbar besonderes Thema, Kamera im Hintergrund) war nicht feststellbar, eher zeigten sich sonst „stillere“ jetzt etwas forscher. Bemerkungen zu Details der Phasen:

- Der „Foliant“ erwies sich als höchst hilfreich, um den Sprung ins Mittelalter zu bewerkstelligen. Offenbar waren einige Schüler auch noch nach der Stunde unsicher, ob es ein „echter Al-Khwarizmi“ war oder nicht. Die kulturelle und in der Folge zeitliche Einordnung gelang gut: Das arabische Flair war überzeugend genug, und dies war ein Hinweis für die Schüler auf „sehr weit zurückliegende Zeiten“.

- Geschichtliche Elemente im Mathematikunterricht sind – wie erwartet – verstreut vorhanden. Zu den o.g. Namen gesellte sich noch Thales; es war bekannt, dass die Araber die Null erfunden haben; die Binomischen Formeln wurden als Themengebiet angeführt; Eratosthenes war nur noch vom Namen her bekannt.

- Da sich in der Klasse Aussiedler aus Russland befinden, ergab es sich, das die Einordnung „südlich vom Aral-See“ diesen Schülern viel vertrauter war als den anderen.

- Die Flussdiagramme waren für alle Schüler sehr überzeugend; die leistungsstärkeren wendeten sie gleich auf das zweite Beispiel und sogar den allgemeinen Fall an. Hier zeigte sich, dass die Zeitvorgabe reichlich bemessen war. Die Hausaufgabe erstreckte sich daher auch auf die 5. Aufgabe.

- Beim Aufschreiben des Grundproblems begannen vereinzelte Schüler mit einer Wurzel, die sie dann durch Nicht-Wurzeln „substituierten“:

$$x + 10\sqrt{x} = 39$$
$$y^2 + 10\sqrt{y^2} = 39$$
$$y^2 + 10y = 39$$

- Dies führte zu Nachfragen, ob man Beträge brauche und was denn AK „eigentlich“ gemeint habe. Mich hat die erste Lesart besonders gefreut, weil ich AK sofort im „meinem Sinne“ gelesen hatte, also wie in der dritten Zeile. Die Frage nach den Beträgen gab Anlass zu dem Hinweis, dass AK keine negativen Zahlen kennt. Daher ist für ihn der Betrag kein Problem, von schreibtechnischen Unterschieden zu heute ganz abgesehen.

- Ein Schmankerl nebenbei: Ein Schüler war beim Stöbern in MS Encarta über den Eintrag „Quadratische Gleichungen“ – womöglich ein Reflex auf die Vorbereitungsstunden - zu dem Eintrag “Kwarismi“ gelangt. Dort wurde auch die Wortgeschichte von *Algebra* angesprochen, allerdings ohne Hinweis auf das Buch von AK.

Reflexion

Der gewählte Einstieg in die Reihe und die Planung der Stunde haben sich bewährt. Die Vorbereitungsstunden haben einiges bereitgestellt, was die Schüler nun im Text wiederentdecken können. Das Unterrichtsgespräch gewann so an Lebhaftigkeit. Die methodischen Hilfsmittel („Foliant“, Flussdiagramme) entwickelten ebenfalls eine sehr erfreuliche Eigendynamik, die bis zur Klassenarbeit am Ende der Gesamtreihe vorhielt.

Die rein mechanischen Rechenvorschriften AK's werden anhand eines Flussdiagramms untersucht. Es werden Unterschiede zwischen AK's Vorgehen und modernen Schreibweisen herausgestellt, einschließlich der Frage nach negativen Lösungen. Den Abschluss und die Hausaufgabe bildet die Frage nach der Begründung für AK's Verfahren. Dies ist der Übergang zur geometrischen Interpretation.

Vorüberlegungen

In der heutigen Stunde sollen die Schüler einen vertieften Eindruck von den Eigentümlichkeiten des Verfahrens von AK bekommen. Das methodisch wichtigste Mittel dazu ist das Flussdiagramm. Es ermöglicht einen übersichtlichen Zugriff auf das im Text Gesagte. Andererseits ist noch deutlich entfernt von modernen algebraischen Schreibweisen. Immerhin erlaubt allein das Benutzen von Variablen das Notieren einer Lösungsformel. Die Begründung für das von AK vorgeschlagene Verfahren ist in die Hausaufgabe verlegt und wird in der Folgestunde zum Thema.

Die Sozialformen der Stunde sind wenig abwechslungsreich: Zu Beginn dominiert der Tafelanschrieb durch einzelne Schüler, der sich anschließende zweite Teil der Stunde wird genau wie der dritte vom Unterrichtsgespräch getragen.

Phasenplanung

1. **Auswertung der Hausaufgabe:** Zunächst werden die Flussdiagramme für die beiden konkreten Beispiele nochmals an der Tafel analysiert. Die Korrektheit der Ergebnisse wird in einer Probe nachgewiesen. Dann wird das Flussdiagramm für den allgemeinen Fall nachgetragen. Die Probe entfällt, da sie algebraisch sehr aufwendig ist. (Nicht Algebra ist das Hauptthema, sonder AK).

2. **Analyse:** Im Unterrichtsgespräch werden die Besonderheiten von AK's Verfahren herausgearbeitet und an der Tafel notiert:

   - AK benutzt keine Variablen.
   - AK kann daher keine Lösungsformel für den allgemeinen Fall angeben.
   - AK kommt nur zu einer einzigen Lösung. An der Stelle, wo die Wurzel gezogen wird, können wir nach weiteren Lösungen suchen. Isabells Bemerkung zu den Beträgen kann hier ein Ausgangspunkt sein.
   - Da AK keine negativen Zahlen kennt, ist unsere „Erweiterung" des Verfahrens für AK nicht annehmbar.

3 **Kritik/ Ausblick:** Offensichtlich hat AK noch keinen Beweis bzw. eine Begründung für sein Verfahren geliefert. Dies ist nun nachzuholen. [Da in den Vorbereitungsstunden nur sehr kurz – ad hoc – auf quadratische Ergänzungen eingegangen wurde, gehe ich nicht davon aus, dass der Zusammenhang mit dem dortigen Verfahren einem Schüler auffällt. Ist im Vorfeld u.U. schon die pq-Formel aufgetreten, kann eine Begründung an dieser Stelle von den Schülern geleistet werden.]

4 **Hausaufgabe:** Arbeitsblatt zum ersten Beweis, 1. – 3. Aufgabe (s. dazu §16, Anhang IV). Die 4. Aufgabe wird sich erst behandeln lassen, wenn die ersten drei bearbeitet sind.

Verlauf

Die Lerngruppe hat sich trotz der geringen Variabilität der Sozialformen aufmerksam an der Arbeit beteiligt. Dabei fiel erneut auf, dass auch eher schwache Schüler durchaus zu engagierten Beiträgen fanden. Die algebraischen Analysen waren nicht zu abgehoben. Hierbei zeigte sich aber erneut, dass ein vernünftiges Grundverständnis algebraischen Tuns vorhanden sein muss, will man sich nicht mit reinem Nachlesen des Textes begnügen. Bemerkungen zu Details der Phasen:

- Ein von mir im Vorfeld nicht gesehenes Problem wurde von den Schülern lebhaft diskutiert: Was schreibt man als Kurzanmerkung über die Pfeile im Flussdiagramm? Wenn man eine 5 hat, liefern „Multipliziere die Zahl mit 5“ und „Quadriere die Zahl“ zwar dasselbe Ergebnis, dennoch ist Unterschiedliches gemeint.

- Das Problem der negativen Wurzeln und zusätzlichen Lösungen wurde von eher schwächeren Schülern angemessen erläutert und als Seitenpfad ins Flussdiagramm eingearbeitet.

- Markus hat als guter Schüler auch ohne ausdrückliche Nachfrage durch L. erkannt, dass unsere Variablenschreibweise – im allgemeinen Fall – zu einem Lösungsterm bzw. einer Endformel führt, die AK nicht zugänglich ist.

- Eine Schülerin wunderte sich sinnvollerweise, dass bei <u>beiden</u> Beispielen die zweite Lösung –13 hieß. Das könne ja wohl nur Zufall sein. (War es auch! Die „Eigendynamik“ dieses Zufalls hat mich allerdings gefreut.) Zur Überprüfung wollte sie ein weiteres Beispiel an der Tafel sehen. Sie nannte eins, und der Algorithmus wurde abgespult. Hier zeigte sich deutlich, wie effektiv AK's Rechenvorschrift funktioniert. Auch die Abwandlung mit Blick auf die zweite Lösung ließ sich problemlos einfügen.

- Aufgrund äußerer Bedingungen wurde der Beweistext <u>nicht</u> als Hausaufgabe ausgegeben. Das Er-Lesen des Beweises wird daher Teil der nächsten Unterrichtsstunde.

Reflexion

Auch in dieser zweiten Stunde zeigten die Schüler ein breit gestreutes, problemorientiertes Umgehen mit AK's Rechenverfahren <u>und</u> der für uns darin sichtbaren Algebra. Erfreulich daran ist insbesondere, dass auch schwächere Schüler zu Beiträgen <u>über</u> Algebra fähig und willens sind.

Untersucht wird AK's geometrischer Beweis sowie der Kommentar dazu: Da AK in der vorliegenden Quelle nicht mit dem näherliegenden zweiten Beweis beginnt, muss er in einem Nachtrag sein Rechenverfahren und das Beweisbild aneinander anpassen. Abschluss und HA ist die Übertragung des geometrischen Beweise auf ein weiteres Beispiel.

Vorüberlegungen

Das Arbeitsblatt zum ersten Beweis findet sich in §16, Anhang IV.

Der Ablauf der Stunde muss gewährleisten, dass die Schüler zu jeder Zeit wissen, was das Ziel der jeweiligen Bemühungen ist. Dies ist nicht selbstverständlich gegeben, da unterschiedliche Aspekte im Auge zu behalten sind: Zum einen der Beweis zu dem schon vorgestellten Flussdiagramm-Schema. Hier müssen algebraische und geometrische Überlegungen aufeinander abgestimmt werden. Zum anderen ist diese Abstimmung in sich nicht problemlos: AK korrigiert seinen Beweis zum Schluss, da er nicht zu seinem Rechenschema passt. Hier sind Irritationen vorprogrammiert.

Phasenplanung

1. **Orientierung:** Zunächst wird das Ziel der Stunde nochmals herausgestellt: Eine quadratische Gleichung war zu lösen, ein Rechenverfahren ist angegeben worden (Flussdiagramm; dieses wird nochmals an die linke Tafel geschrieben), und <u>nun</u> gilt es, dieses Rechenverfahren zu erklären, bzw. seine Korrektheit nachzuweisen. Der zweite Orientierungsschritt ist der Übergang zur geometrischen Darstellung. Das Ausgangsquadrat AB wird auf der Mitteltafel angezeichnet und seine einzelnen Bestandteile und die im Text auftauchenden Begriffe einander zugeordnet: Die „Wurzeln“ sind die Seiten der Quadratfläche.

2. **Erarbeiten des Textes:** Die Schüler erhalten den Beweistext und versuchen selbständig, den geometrischen Manipulationen AK's zu folgen. In dieser und der folgenden Phase steht der Text des neuen (2.) Arbeitsblattes im Mittelpunkt.

3. **Erstellung der Beweisfigur:** Schrittweise wird nun der Text auf die Abbildung an der Tafel übertragen. Unterschiedliche Farbgebung kann die einzelnen Schritte unterscheiden.

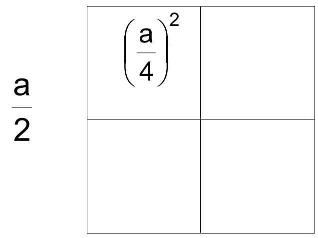
4. **Vergleich mit Flussdiagramm:** Genau wie AK werden auch die Schüler feststellen, dass der gegebene geometrische Beweis und das Rechenverfahren (Flussdiagramm) zu Anfang nicht zueinander passen, während die weiteren Diagrammschritte gut nachvollziehbar bzw. übertragbar sind. Zu wünschen wäre, dass zumindest leistungsstärkere Schüler erkennen, dass genau dieser Punkt von AK im letzten Absatz behandelt wird.

5. **Beweisnachbesserung:** Es wird der letzte Absatz des Arbeitsblattes nochmals gelesen. Die unterschiedlichen Rechenmöglichkeiten werden konkret an der Tafel durchgerechnet:

$$10 \xrightarrow{:2} 5 \xrightarrow{\text{hoch2}} 25 \xrightarrow{39+} 64$$

$$10 \xrightarrow{:4} 2{,}5 \xrightarrow{\text{hoch2}} 6{,}25 \xrightarrow{\bullet 4} 25 \xrightarrow{39+} 64$$

und zudem geometrisch interpretiert:



Offensichtlich gilt: $4 \bullet \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Auch eine allgemeine algebraische Umformung kann diesen Zusammenhang erklären:

$$4 \bullet \left(\frac{a}{4}\right)^2 = 4 \bullet \frac{a^2}{16} = \frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

6 **Hausaufgabe:** Die so erarbeitete geometrische Begründung wird übertragen auf ein neues Beispiel: $x^2 + 8x = 65$.

Verlauf

Als sehr wichtig hat sich die erste Orientierungsphase erwiesen: Im Rückblick zeigte sich noch deutlicher, wie sehr AK’s Vorschrift ein rein schematischer Kalkül ist, der zunächst zwar ein Ergebnis liefert, aber keinerlei Begründung für seine Korrektheit in sich trägt. An dieser Stelle konnte der Wechsel zum „Beweis“ für die Lerngruppe überzeugend motiviert werden.

In der zweiten Phase, der Erarbeitung des geometrischen Gesamtbildes in Partnerarbeit, mußten einige Gruppen immer wieder zur Weiterarbeit ermutigt werden. Anderseits gab es eine ganze Reihe von Diskussionen, bei denen sachorientiert im Ausgang vom Beweistext und der Eigenstruktur des geometrischen Bildes argumentiert wurde. Das Zusammentragen der Einzelschritte an der Tafel gelang danach auch unter Mithilfe schwächerer Schüler.

Die anschließende Beweiskritik („Der Beweis passt ja gar nicht zum Flussdiagramm!“) konnte nur noch die Aufmerksamkeit der leistungsstarken Schüler gewinnen. Auch die algebraischen Darstellungsmöglichkeiten waren für die Gesamtgruppe wenig anregend. Allerdings läßt sich dieses Problem schlecht aus der Welt schaffen, da es lernpsychologisch nachvollziehbar ist, dass nach Abschluss des Beweises die Aufmerksamkeitskurve dramatisch abfällt.

Reflexion

Will man das zum Schluss angesprochene „Abschlaffen“ vermeiden, müsste man mit dem 2. Beweis von AK <u>anfangen</u>. Aber das wäre schade, da <u>diesen</u> Beweis die Schüler selber finden können (s. nächste Stunde). Also lassen wir alles beim alten.

Untersucht wird AK's geometrischer Beweis sowie der Kommentar dazu: Da AK in der vorliegenden Quelle nicht mit dem näherliegenden zweiten Beweis beginnt, muss er in einem Nachtrag sein Rechenverfahren und das Beweisbild aneinander anpassen. Abschluss und HA ist die Übertragung des geometrischen Beweise auf ein weiteres Beispiel.

Vorüberlegungen

Das Arbeitsblatt zum ersten Beweis findet sich in §16, Anhang IV.

Der Ablauf der Stunde muss gewährleisten, dass die Schüler zu jeder Zeit wissen, was das Ziel der jeweiligen Bemühungen ist. Dies ist nicht selbstverständlich gegeben, da unterschiedliche Aspekte im Auge zu behalten sind: Zum einen der Beweis zu dem schon vorgestellten Flussdiagramm-Schema. Hier müssen algebraische und geometrische Überlegungen aufeinander abgestimmt werden. Zum anderen ist diese Abstimmung in sich nicht problemlos: AK korrigiert seinen Beweis zum Schluss, da er nicht zu seinem Rechenschema passt. Hier sind Irritationen vorprogrammiert.

Phasenplanung

1. **Orientierung:** Zunächst wird das Ziel der Stunde nochmals herausgestellt: Eine quadratische Gleichung war zu lösen, ein Rechenverfahren ist angegeben worden (Flussdiagramm; dieses wird nochmals an die linke Tafel geschrieben), und nun gilt es, dieses Rechenverfahren zu erklären, bzw. seine Korrektheit nachzuweisen. Der zweite Orientierungsschritt ist der Übergang zur geometrischen Darstellung. Das Ausgangsquadrat AB wird auf der Mitteltafel angezeichnet und seine einzelnen Bestandteile und die im Text auftauchenden Begriffe einander zugeordnet: Die „Wurzeln“ sind die Seiten der Quadratfläche.

2. **Erarbeiten des Textes:** Die Schüler erhalten den Beweistext und versuchen selbständig, den geometrischen Manipulationen AK's zu folgen. In dieser und der folgenden Phase steht der Text des neuen (2.) Arbeitsblattes im Mittelpunkt.

3. **Erstellung der Beweisfigur:** Schrittweise wird nun der Text auf die Abbildung an der Tafel übertragen. Unterschiedliche Farbgebung kann die einzelnen Schritte unterscheiden.

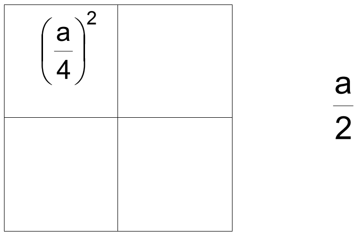
4. **Vergleich mit Flussdiagramm:** Genau wie AK werden auch die Schüler feststellen, dass der gegebene geometrische Beweis und das Rechenverfahren (Flussdiagramm) zu Anfang nicht zueinander passen, während die weiteren Diagrammschritte gut nachvollziehbar bzw. übertragbar sind. Zu wünschen wäre, dass zumindest leistungsstärkere Schüler erkennen, dass genau dieser Punkt von AK im letzten Absatz behandelt wird.

5. **Beweisnachbesserung:** Es wird der letzte Absatz des Arbeitsblattes nochmals gelesen. Die unterschiedlichen Rechenmöglichkeiten werden konkret an der Tafel durchgerechnet:

$$10 \xrightarrow{:2} 5 \xrightarrow{\text{hoch2}} 25 \xrightarrow{39+} 64$$

$$10 \xrightarrow{:4} 2{,}5 \xrightarrow{\text{hoch2}} 6{,}25 \xrightarrow{\bullet 4} 25 \xrightarrow{39+} 64$$

und zudem geometrisch interpretiert:



Offensichtlich gilt: $4 \bullet \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Auch eine allgemeine algebraische Umformung kann diesen Zusammenhang erklären:

$$4 \bullet \left(\frac{a}{4}\right)^2 = 4 \bullet \frac{a^2}{16} = \frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

7 **Hausaufgabe:** Die so erarbeitete geometrische Begründung wird übertragen auf ein neues Beispiel: $x^2 + 8x = 65$.

Verlauf

Als sehr wichtig hat sich die erste Orientierungsphase erwiesen: Im Rückblick zeigte sich noch deutlicher, wie sehr AK's Vorschrift ein rein schematischer Kalkül ist, der zunächst zwar ein Ergebnis liefert, aber keinerlei Begründung für seine Korrektheit in sich trägt. An dieser Stelle konnte der Wechsel zum „Beweis“ für die Lerngruppe überzeugend motiviert werden.

In der zweiten Phase, der Erarbeitung des geometrischen Gesamtbildes in Partnerarbeit, mußten einige Gruppen immer wieder zur Weiterarbeit ermutigt werden. Anderseits gab es eine ganze Reihe von Diskussionen, bei denen sachorientiert im Ausgang vom Beweistext und der Eigenstruktur des geometrischen Bildes argumentiert wurde. Das Zusammentragen der Einzelschritte an der Tafel gelang danach auch unter Mithilfe schwächerer Schüler.

Die anschließende Beweiskritik („Der Beweis passt ja gar nicht zum Flussdiagramm!“) konnte nur noch die Aufmerksamkeit der leistungsstarken Schüler gewinnen. Auch die algebraischen Darstellungsmöglichkeiten waren für die Gesamtgruppe wenig anregend. Allerdings läßt sich dieses Problem schlecht aus der Welt schaffen, da es lernpsychologisch nachvollziehbar ist, dass nach Abschluss des Beweises die Aufmerksamkeitskurve dramatisch abfällt.

Reflexion

Will man das zum Schluss angesprochene „Abschlaffen“ vermeiden, müsste man mit dem 2. Beweis von AK <u>anfangen</u>. Aber das wäre schade, da <u>diesen</u> Beweis die Schüler selber finden können (s. nächste Stunde). Also lassen wir alles beim alten.

9 5. und 6. Stunde

Die Schüler vergleichen ihre eigenen Texte im Stile AK's untereinander. Damit kommt der mathematische Teil der Sequenz zum Abschluss. Im zweiten Teil der Stunde wird das von den Schülern gesammelte historische Material gesichtet und sortiert. In der Folgestunde wird dann der Zeitstrahl erstellt. Dies bildet die Vorarbeit zum Lesen des Vorworts von AK.

Vorüberlegungen

Während die ersten vier Stunden noch sehr Mathematik-nah waren, schließen sich nun drei Stunden an, in denen die Mathematik gar nicht oder nur am Rande auftaucht. Die Unterrichtsmethoden werden daher sowohl bei der Auswertung der Geschichtsdaten (5./6. Stunde) als auch bei der Analyse von AK's Vorwort (7. Stunde) von denen einer üblichen Mathematikstunde deutlich abweichen.

Die Auswertung der Geschichtskärtchen geschieht in sechs Kleingruppen. Der genaue Ablauf wird den Schülern anhand einer Folie erläutert (s.u. §18, Anhang VI). Dabei ist besonders auf Punkte IV + V aufmerksam zu machen: Sie sollen garantieren, dass alle Schüler in die Arbeit eingebunden bleiben.

Die Analyse des Vorworts von AK wird durch strukturierende Leitfragen gesteuert. Der Text ist recht lang und erschließt sich Neuntklässern nicht ohne weiteres. Die beigegeben Fragen sollen das Eindringen in den Text unterstützen. Die letzte Frage bindet den Text an die Gegenwart der Schüler an. Es sollte deutlich werden, dass die Einbindung in religiöse Kontexte heute fehlen würde. Andererseits sind Lehrbuchcharakter (Seinen Lambacher hat jeder Schüler in der Tasche.) und Danksagungen (Im Mathematiklehrwerk vielleicht weniger als in modernen populärwissenschaftlichen Werken) durchaus vertraut. Besonders das Versprechen, die gelieferte Mathematik habe etwas mit dem Alltag der „Abnehmer" zu tun, ist ein offenbar schon zu AK's Zeiten nicht immer leicht einlösbares Versprechen.

Phasenplanung

1. **Besprechung der Hausaufgabe:** Zwei Schüler lesen ihre eigenen Texte zu AK's zweitem Beweis vor.

2. **Orientierung:** Die von den Schülern zu Hause zusammengestellten Geschichtskärtchen sollen gesichtet und in eine zeitliche Reihenfolge gebracht werden. Ziel ist ein Zahlenstrahl. Das genau Vorgehen wird auf einer Folie erläutert.

3. **Erarbeitung I:** Die Schüler sichten in 6 Teilgruppen ihr Material, tauschen aus und sortieren neu (ergänzen oder korrigieren ihre Ergebnisse). **- Ende der 5. Stunde -**

4. **Auswertung I:** Die endgültig sortierten Kärtchen werden auf Papier geklebt.

5. **Auswertung II:** Die Schüler verschaffen sich einen Gesamtüberblick über die Zeit von AK.

6. **Neuorientierung:** Der Lehrer stellt das Vorwort von AK vor. Er unterstreicht die für den Mathematikunterricht untypische Methode des Textanalysierens und weist auf die entsprechenden Hilfen auf dem Arbeitsblatt hin.

7. **Erarbeitung/ Hausaufgabe:** Die Schüler erhalten das Vorwort zu AK's Buch mit den dort angegeben Arbeitsaufträgen. HA ist dabei nur Nr. 1-3.

Verlauf

Die Hausaufgabe wurde i.a. nicht erfolgreich bearbeitet. Der Mehrzahl der Schüler war das Ziel der Schreibübung entweder unklar oder die Aufgabe wurde gar nicht erst angegangen. Lediglich von einem (1) Schüler war eine vernünftige Lösung zu erlangen. Andererseits zeigte die Besprechung der Aufgabe im Unterricht, dass das Leistungsvermögen der Schüler durchaus ausreicht, um die geforderten Texte zu verfassen.

In ähnlicher Weise unbefriedigend gestaltete sich die Auswertung der Geschichtskärtchen. Eine ganze Reihe von Schülern hatten nur zwei oder drei Daten, einige auch gar nichts herausgefunden. Dennoch reichte das Material, um eine erste Sortierung vorzunehmen. Dabei zeigten alle Teilnehmer reges Interesse an der gemeinsamen Arbeit. Der Wechsel zu geschichtlichen Fragen auch innerhalb des Mathematikunterrichts wurde offenkundig als positiv erlebt.

Als Hausaufgabe (zunächst nicht vorgesehen) ergab sich ein neuer Suchauftrag an diejenigen, die bisher nichts oder zu wenig beigetragen hatten. Das Ergebnis war allerdings nicht überwältigend, da die neu hinzukommenden Kärtchen weitgehend den vorhandenen glichen – ein Ergebnis, das nicht überraschen sollte.

Die Erstellung des Zahlenstrahls war dann ein leichtes. Da die Kärtchen frei verschiebbar waren, konnten Lücken gut geschlossen werden. Ein Schüler war so angestachelt, dass er zu Hause die Ergebnisse seiner Gruppe mittels Textverarbeitungssystem auf Klebeschildchen übertrug und als Farbdruck wieder mitbrachte.

Der Zeitrahmen war recht großzügig. Falls man sofort mit der 2. Phase beginnt und falls durch deutliche Erinnerung an die langfristige Sammelaufgabe alle Schüler ihre sechs Kärtchen haben, reicht auch eine Einzelstunde für die Erstellung des Zeitstrahls.

Reflexion

Die Schreibübung hat sich in dieser Form nicht bewährt. Hier ist ein anderer Ansatz zu suchen, mit dem es besser gelingt, die Schüler zu Produktion von Texten zu veranlassen. Ein - wenn auch kleiner - Fortschritt wäre es schon, wenn alle Schüler die Hausaufgabe anfertigen, d.h. einen Text „im Stile AK's“ verfassen.

Sowohl die Schüler als auch der Lehrer haben die Arbeit an dem geschichtlichen Kontext als bereichernd erlebt. Auffällig war insbesondere, dass trotz der nachlässig gemachten Datensammlung die Gruppenarbeit gut und engagiert durchgeführt wurde. Für das Sammeln von Daten bzw. geschichtlichen Situationen kann man u.U. stärkere Vorgaben machen, indem der L. etwa Beispiele nennt. Allerdings ginge dies auf Kosten der Selbsttätigkeit der Schüler. Deutliche Erinnerungen an den Suchauftrag sollten reichen, um dieses Problem zu lösen.

Nachdem sich die Schüler in den vergangenen beiden Stunden einen Einblick in die Zeit von AK verschafft haben, wird zum Abschluss der AK-Sequenz in dieser Stunde noch das Vorwort zu AK's Buch untersucht. Dabei soll deutlich werden, in welchem kulturellen Zusammenhang AK seine Tätigkeit sah. Auch ist zu fragen, ob sich für „moderne" Autoren mathematischer Werke ähnliche Überlegungen ergeben könnten.

Vorüberlegungen

Das Arbeitsblatt mit AK's Vorwort findet sich in §19, Anhang VII.

Diese Stunde bildet die letzte in der Sequenz rund um AK. Zur Einbindung in die Reihe und zu den methodischen Besonderheiten der Stunde vgl. §9, Vorüberlegungen.

Phasenplanung

1. **Auswertung der Hausaufgabe:** Anhand der strukturierenden Fragen 1-2 wird der Text zunächst grob vorgegliedert. Aufgabe 3 führt dann zu den inhaltlichen Details der Abschnitte. Das Tafelbild sollte die folgenden Kernaussagen festhalten:

   A ***Lobpreisung*** Gottes und Mohammeds: AK steht als Forscher nicht neben der Religion, sondern ist auch weiterhin Glaubender.

   B ***Verbeugung*** vor den Vorgängern: Diese machten große Anstrengungen und erhielten nur bescheidenen Dank.

   C ***Dank*** an den Kalifen: Denn die Wissenschaft braucht auch Unterstützung in dieser Welt, nicht nur die Unterstützung Gottes.

   D ***Anwendungsgebiete:*** eigentliche Absicht des Buches.

   E ***Hoffnung:*** auf göttlichen Lohn.

2. **Neuorientierung:** Vergleich mit einem imaginären modernen Rechenbuch. Modell kann hier das Mathematik – Unterrichtswerk sein. (Diese Blickrichtung entspricht Frage 4 zum Vorwort.) Während *„A Lobpreisung"* und *„E Hoffnung"* heute kaum noch aktuell scheinen, gilt dies für die drei anderen Elemente weit weniger: Die *„B Verbeugung"* vor den Vorgängern gehört in das Vorwort der meisten Sachbücher, der *„C Dank"* an Finanzgeber läßt sich dort bisweilen auch finden. Für die Schüler könnte die Idee, dass Unterrichtswerke und Lehrer vom Staat gestellt werden , in diesen Zusammenhang gehören. Die Frage nach den *„D Anwendungsgebieten"* ist ein Standardritual im Unterricht: „Wozu muss ich das lernen? Braucht man das irgendwo?"

3. **Rückblick auf die Reihe:** Was bleibt hängen? Was war sinnvoll, was weniger? ...

Verlauf

Die Beantwortung der ersten Fragen gestaltete sich etwas zögerlich. Das Gliedern in Sinnabschnitte ist auch noch für ältere Schüler bisweilen problematisch. Das liegt besonders daran, dass eine Gliederung immer schon eine inhaltliche Analyse einschließt. Bei diesem konkreten Text ist der inhaltliche Aspekt aber durchaus sperrig. Insofern ist eine verhaltene Reaktion der Schüler nicht überraschend. Der Ablauf der Stunde geriet auf diese Weise in ein sehr lehrergesteuertes Unterrichtsgespräch, bei dem die entscheidenden Impulse nicht aus der Schülergruppe kamen. Andererseits wurde die Thematik von einer großen Breite der Lerngruppe aufgenommen, sodass gerade mathematisch weniger leistungsstarke Schüler sich in das Gespräch einbrachten.

Die letzte Bemerkung lässt sich auch auf die Erweiterung der Betrachtung (→modernes Rechenbuch) beziehen. Die Schüler waren durchaus in der Lage, den Schritt weg von der Zeitgebundenheit hin zu einer Aktualisierung der Inhalte zu tun.

Für eine Reflexion der Gesamtreihe blieb kaum noch Zeit. Die Bemerkungen dazu fielen eher verhalten aus. Erkennbar war immerhin, dass die Reihe durchweg als positive Abwechslung im Mathematik-Unterrichts-Alltag erlebt wurde.

Reflexion

Wie schon die 5./6. Stunde so war auch diese Stunde für alle Beteiligten Neuland. Die Schüler zeigten sich zwar verhalten gegenüber der Textarbeit, waren aber in einer großen Breite offen für die Inhalte. Dies sollte Mut machen, sich auch aus dem Mathematikunterricht heraus auf derartige Stunden und die ihnen eigenen Methoden einzulassen. Vielleicht kann auch aus dem Geschichts- oder Deutschunterricht heraus die ein oder andere Schwachstelle methodisch besser aufbereitet werden. Insgesamt zeigten sich erfreuliche Verschiebungen in der Beteiligung am Unterrichtsgespräch. Und das allein spricht schon für einen solchen Versuch.

Die Klassenarbeit ist auf zwei Unterrichtsstunden angesetzt. Die erste Stunde hat AK zum Gegenstand. Hier wird der zweite Fall untersucht. Analog zur Unterrichtssequenz wird mit Flussdiagrammen und algebraischen Interpretationen gearbeitet. Durch die Folgesequenz im Anschluss an die AK-Stunden ist den Schülern der moderne Umgang mit quadratischen Ergänzungen, pq-Formel und Diskriminante vertraut. Daher taucht dieser Aspekt ebenfalls auf. Im Unterschied zur AK-Sequenz muss das Beweisbild von den Schülern selber anhand des Textes von AK erstellt werden.

Vorüberlegungen

Das Aufgabenblatt zur Klassenarbeit findet sich in §20, Anhang VIII.

Die AK-Sequenz bildete den Einstieg in die Reihe über quadratische Gleichungen. Daher schlossen sich an die AK-Sequenz die Standardsequenzen zu Quadratischem Ergänzen, der pq-Formel und Anwendungen von quadratischen Gleichungen an. Alle Aspekte sollten Teil der Klassenarbeit werden. Um AK genügend Platz einzuräumen wurde die Klassenarbeit zweistündig geschrieben: eine Stunde zu AK, eine Stunde zu dem Rest. Da sich keine Doppelstunde finden ließ, wurde des AK-Teil am 2.12.98 geschrieben und der Rest am 7.12.98.

Die AK-Aufgaben orientieren sich an den Techniken, die die Schüler im Unterricht erprobt haben:

- 1a) algebraische Neuformulierung des „ausformulierten“ Originals
- 1b) Flussdiagramm als Interpretationshilfe
- 1c) Übung zum Flussdiagramm
- 1d) Interpretation von Sonderfällen mit Hilfe von Flussdiagrammen
- 1e) Veranschaulichung des Textes durch eine <u>selbst zu findende</u> Zeichnung
- 1f) Beweis des Lösungsverfahrens durch Manipulation der Zeichnung aus 1e)

Während 1a-c) keine besonderen Anforderungen stellen, setzt die Interpretation in 1d) ein sinnvolles Umgehen mit den Flussdiagrammen voraus. Hier wird auch nochmals der schon im Unterricht entdeckte Zusammenhang mit der pq-Formel deutlich. 1e-f) sind stark geometrisch orientiert. Hier ist es offen, in welchem Maße die Schüler in der Lage sind, die Textvorgaben in Geometrie zu übersetzen.

Die zweite Hälfte der Klassenarbeit orientiert sich an o.g. Vorgaben. Aufgabe 2 und 3 garantieren, dass die Schüler die Kenntnis <u>beider</u> Verfahren (quadratische Ergänzung, pq-Formel) nachweisen, incl. Sonderfälle. Für Aufgabe 4 und 5 ist ihnen freigestellt, welches Verfahren sie wählen. Während Aufgabe 4 eine rein-algebraische Aufgabe mit deutlich erhöhtem Anspruch ist, behandelt Aufgabe 5 ein Sachproblem. Dieses Problem wurde im Unterricht nicht geübt. Die Begründung für die Formel aus 5a) wird in 5c) verlangt.

Auswertung

Um den Einfluss der AK-Aufgabe auf die Gesamtarbeit abschätzen zu können, werden unten auch die Ergebnisse der anderen Aufgaben mitgeteilt. So ergibt sich auch ein Eindruck der Gewichtungen bei der Korrektur.

Name	1a	1b	1c	1d	1e	1f	**Summe 1**	2	3	4	5	**Summe 2-5**	**Summe 1-5**	Note	Kopie
	5	10	5	10	5	5	**40**	15	15	15	15	**60**	**100**		
HA	5	10	5	10	5	2	**37**	15	15	15	15	**60**	**97**	1	J
SA	5	10	5	9	4	0	**33**	13	11	13	13	**50**	**83**	2	J
JB	5	4	3	0	0	0	**12**	8	8	5	13	**34**	**46**	5+	N
AB	1	7	0	24	0	0	**12**	15	13	10	14	**50**	**62**	3-	J
ME	5	10	5	3	-	1	**24**	9	13	5	2	**29**	**53**	4	N
DF	5	10	5	9	5	-	**34**	9	6	13	6	**34**	**68**	3	J
SG	5	7	4	10	5	-	**31**	8	11	4	3	**26**	**57**	4	J
JH1	1	7	2	4	0	0	**14**	7	7	0	3	**17**	**31**	5	J
JH2	5	10	5	6	0	0	**26**	7	9	0	12	**28**	**54**	4	N
SL	5	9	5	8	0	-	**27**	11	9	12	8	**40**	**67**	3	N
BL	5	10	5	0	-	-	**20**	8	13	-	4	**25**	**45**	5+	J
HR	5	10	5	10	5	-	**35**	12	12	-	1	**25**	**60**	4+	J
ES	5	10	5	10	5	2	**37**	15	12	11	15	**53**	**90**	1-	N
FS	5	5	2	-	0	0	**12**	15	8	0	5	**28**	**40**	5	N
MS	5	8	5	10	0	0	**28**	11	13	15+3	15	**57**	**85**	2	J
TS	4	10	5	7	5	-	**31**	2	8	0	4	**14**	**45**	5+	N
LS	5	9	5	4	1	0	**24**	10	13	15	7	**45**	**69**	3	N
DS1	5+1	10	5	7	5	2	**35**	15	15	15	15	**60**	**95**	1	J
IS	5	10	5	10	5	2	**37**	15	13	13	15	**56**	**93**	1	J
OS	5	10	4	7	4	1	**31**	13	14	13	3	**41**	**72**	3	J
DS2	5	7	4	10	0	-	**26**	15	11	13	14	**53**	**79**	2-	J
JS	5	10	5	7	0	0	**27**	13	10	3	10	**36**	**63**	4+	J
KT	5	7	4	2	0	0	**18**	15	9	14	15	**53**	**71**	3	N
AW	5	7	4	2	0	-	**18**	15	4	12	14	**45**	**63**	4+	J
VW	5	6	4	3	0	0	**18**	5	2	3	8	**18**	**36**	5	N

Die folgende Übersicht zeigt den Ausfall der Arbeit nach Notenbereichen. Es wird getrennt aufgeführt, welches das Ergebnis der Gesamtarbeit war, und wie sich das Ergebnis dargestellt hätte, wenn nur der AK-Teil zur Wertung herangezogen worden wäre:

	Gesamtzahl	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Aufgabe 1 – 5	25	4	3	6	6	6	0
nur Aufg. 1	25	3	7	5	2	8	0

Legt man nur den AK-Teil zugrunde, ergibt sich sowohl am oberen als auch am unteren Notenende eine deutliche Häufung. Beide Häufungen verschwinden bzw. werden abgemildert, wenn Aufgabe 2-5 hinzugenommen werden. In beiden Fällen ist der rein statistische Gesamtausfall wenig spektakulär.

Interessant ist der Blick auf das Abschneiden einzelner Schüler in den jeweiligen Arbeitsteilen. So sind etwa JB und AB im AK-Teil gleich schlecht, aber AB kann im Standardteil die Arbeit noch retten. (AB arbeitet in der Regel zu Hause zuverlässiger nach als JB.) Umgekehrt ist TS im Standardteil kaum etwas gelungen, während er im AK-Teil recht gut abschneidet. TS ist im Unterricht auf Ansprache gut, arbeitet aber zu lässig nach. Die „spannendere“ AK-Sequenz könnte sich hier zeigen. Andererseits ist MS ein im Unterricht ebenfalls zurückhaltender, aber aufmerksamer Schüler. Dennoch kann er im AK-Teil nicht viel umsetzen und rettet die Gesamtarbeit im Standardteil.

Das Gesamtbild bleibt also etwas diffus. Man darf jedoch festhalten, dass in der gewählten Art eine Klassenarbeit zu AK durchaus gestellt und von den Schülern auch – in dem üblichen Rahmen – erfolgreich bearbeitet werden kann.

Die Sequenz fügt sich organisch in eine Reihe zu quadratischen Gleichungen ein. Neben mathematikhistorischen Aspekten zeigen sich vielfältige Bezüge zu Standardthemen der modernen Mathematikdidaktik: Reflexion der speziellen Leistungen algebraischer Schreibweisen, Zusammenspiel von Geometrie und Algebra, Entdecken von Begründungszusammenhängen u.v.a.m. Die historischen Aspekte wurden wohlwollend aufgenommen, bedürfen aber einer deutlicheren Arbeitsvorgabe, einschließlich der Erinnerung daran, dass noch etwas aussteht. Die Leistungskontrolle zeigte eine große Bandbreite an Stärken und Schwächen, wobei es auffällig ist, wie sich alle Schüler um angemessene Formulierungen und Darstellungen zumindest bemühen.

Lernziele, die im normalen MU leicht zu kurz kommen und in der vorliegenden Reihe geübt werden:

- Die Schüler schulen ihre passive Sprachkompetenz, indem sie einen mathematischem Zusammenhang in ungewöhnlicher Darstellung analysieren.

- Die Schüler schulen ihre aktive Sprachkompetenz, indem sie selber mathematische Texte produzieren.

- Die Schüler üben sich im kritischen Gebrauch ihrer algebraischen Fähigkeiten, indem sie die Vorgaben von AK mit ihren eigenen Kenntnissen vergleichen und dabei Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausarbeiten.

- Die Schüler festigen ihre algebraisch-geometrische Kompetenz, indem sie durchgehend Algebra und geometrische Veranschaulichung in Beziehung zueinander setzen.

- Die Schüler gewinnen Einsicht in die geschichtliche Dimension von Mathematik, indem sie die zeitgeschichtlichen Ereignisse sammeln, sortieren und zu einer Zeitleiste ordnen.

- Die Schüler erfahren Mathematik als eine Wissenschaft, die nicht nur in der griechisch orientierten abendländischen Tradition betrieben wird, sondern auch in anderen Kulturräumen vorangetrieben worden ist. Hier kann insbesondere der kulturelle Vorsprung der arabischen Welt vor dem christlichen Mitteleuropa zur Zeit Karl des Großen herausgestellt werden.

VERÄNDERUNGEN BEI EINER WIEDERHOLUNG DER REIHE

- Das Selberschreiben von Texten muss intensiviert werden. Die bisherigen Ergebnisse blieben noch zu unverbindlich (s.o. §9, Beginn der 5. Stunde, Verlauf und Reflexion). Welcher Art ein solcher veränderter Schreibauftrag sein könnte, ist noch unklar.

- Die Auseinandersetzung mit dem historischen Umfeld war für alle Beteiligten anregend (vgl. a.a.O.). Aber es blieb insgesamt bei einer nicht weiter reflektierten Sammlung von Einzeldaten. Hier wäre zu überlegen, wie der geschichtliche Rahmen, insbesondere die wissenschaftsgeschichtliche Situation im 9. Jh. den Schülern deutlicher vor Augen gestellt werden kann.

- Ähnliches gilt für das Vorwort: Der Vergleich mit modernen Autoren blieb blass. Hier fehlt den Schülern das entsprechende Material, um selbständig aus eigenen Überlegungen schöpfen zu können.

PLANUNGEN

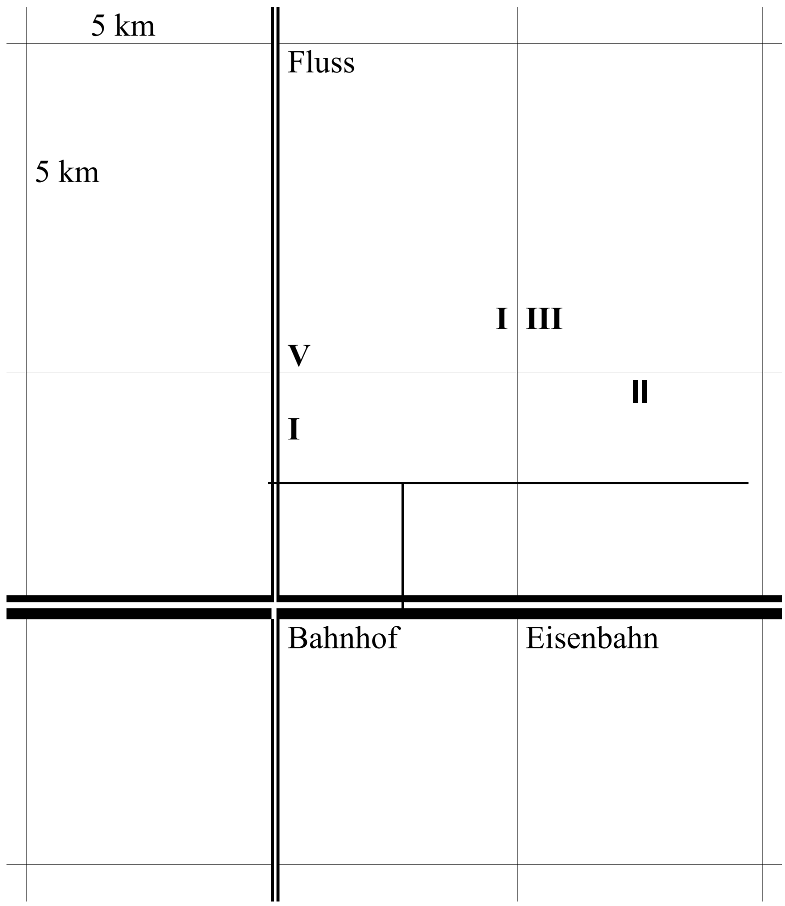
Die vorliegende Sequenz hat sich insgesamt so gut bewährt, dass sie einen Standardbaustein meiner Klasse-9-Konzeption bilden wird. In ähnlicher Weise sollte auch in die 10. Jahrgangsstufe historisches Material einfließen. Entsprechendes Material aus dem HiDiMa – Projekt liegt vor und wird bei nächster Gelegenheit ausprobiert. Eine Adam – Riese – Kurzsequenz in der 7. Jahrgangsstufe gehört in dasselbe Umfeld und hat sich dort ebenfalls bestens bewährt. Erinnert sei noch an das Standardprogramm zu den Zahlensystemen in der 5. Jahrgangsstufe, dass sich durchaus aufpäppeln lässt.

Damit ist die Mathematikgeschichte in der Sekundarstufe I durchaus präsent. Es fehlt noch eine ähnliche Aufwertung in der SII. Hier denke ich z.Z. an Material zur Stochastik, wie es z.B. WS 1997/98 vom IDM im Rahmen des Arbeitskreises „Mathematikgeschichte für Lehrer" angeboten wurde. Weiteres Material hierzu – wie auch zur Sekundarstufe I – findet sich in ***mathematik lehren 91***.

Eine Landnahme – irgendwo in den Weiten des Universums???

Ein Fluss und eine Eisenbahn kreuzen sich rechtwinklig. Das durch diese Verbindungswege neu erschließbare Land wird in Quadrate aufgeteilt, die eine einheitliche Kantenlänge von 5 km haben. Ein Farmer kauft vier dieser Quadrate (I - IV), bewirtschaftet zunächst jedoch nur eine kleinere – ebenfalls quadratische – Fläche direkt am Bahnhof. Später erweitert er diesen Ur-Hof: Er nutzt die volle Grundstücks<u>breite</u> entlang der Straße aus und erhält so einen rechteckigen Hof (I + II). Auf diese Weise vergrößert der Farmer seine bewirtschaftete Fläche um 16 km². Wie groß war der Ur-Hof?

HINWEIS: Versuche durch Umstellen oder Verschieben einzelner Flächen bzw. Teilflächen eine Situation herzustellen, in der du die Ausgangswerte der Aufgabe auf neue Art einbringen kannst.



AL-KHWARIZMI

AL-KITAB AL-MUHTASAR FI HISAB AL-GABRE WA-L-MUQABALA

Name: Abu Abd Allah Mohammed Ben Musa Al-Khwarizmi

Herkunft: aus Khwarizmi, heute Chiwa, etwa 250 km südlich des Aral – Sees

Lebensdaten: 780 – 847

Hauptwerk: „Kurzgefasstes Buch über das Rechnen durch Vervollständigen und Ausgleichen“ (s.o.)

Zeitgeschehen: 800 Krönung Karls des Großen zum Kaiser
?
?
?

Hausaufgabe: zu Freitag nächster Woche:

- Suche im Zeitraum 500 – 1000 n.Chr.
  3 Ereignisse der christlichen (europäischen) Geschichte und
  und 3 Ereignisse der arabischen (?) Geschichte heraus.

- Notiere sie jeweils einzeln auf einem DIN A7 - Zettel.

AL-KHWARIZMI
AL-KITAB AL-MUHTASAR FI HISAB AL-GABRE WA-L-MUQABALA

Kurzgefasstes Buch über das Rechnen durch Vervollständigen und Ausgleichen

Vorbemerkungen:

Al-Khwarizmi untersucht in diesem Buch Gleichungen, die Kombinationen sind aus Quadraten, Wurzeln und Zahlen. Er stellt verschiedene solcher Gleichungen vor und erläutert, wie sie sich lösen lassen (vorliegendes Arbeitsblatt). Im Anschluss daran zeigt er anhand geometrischer Überlegungen, warum sein Lösungsweg zu korrekten Ergebnissen führt (weiteres Arbeitsblatt). Bei den in diesen Texten angesprochenen „Dirhem" handelt es sich um eine arabische Währungseinheit.

Text:

Eine dieser Kombinationen ist zum Beispiel: "Ein Quadrat und zehn seiner Wurzeln ergeben neununddreißig Dirhem." D.h. wie muss das Quadrat lauten, das um zehn seiner eigenen Wurzeln vermehrt neununddreißig ergibt? Dies ist die Lösung: Du halbierst die Anzahl der Wurzeln, was im vorliegenden Fall fünf ergibt. Diese multiplizierst du mit sich selbst; das Produkt ist fünfundzwanzig. Addiere dieses zu neununddreißig; die Summe ist vierundsechzig. Nun ziehe daraus die Wurzel, was acht ergibt, und subtrahiere davon die halbe Anzahl der Wurzeln, was fünf macht; der Rest ist drei. Dies ist die Wurzel des Quadrates, welches du suchtest. Das Quadrat selbst ist neun.

Aufgaben:

1. Lies den Text aufmerksam durch.

2. Beschreibe mit deinen eigenen Worten das Problem, das Al-Khwarizmi lösen will. Wie lautet das Problem in unserer algebraischen Schreibweise?

3. Schreibe die einzelnen Schritte von Al-Khwarizmis Lösungsweg als "Flussdiagramm" auf. Gib jeweils die mathematischen Operationen an, die bei den einzelnen Schritten angewendet werden.

$$10 \xrightarrow{:2} 5 \xrightarrow{\cdots} \cdots$$

4. Wende Al-Khwarizmis Verfahren auf die Gleichung $x^2 + 8x = 65$ an. Schreibe den Weg genauso auf wie in Aufgabe 3.

5. Die beiden bisher gelösten Aufgaben gehören zu dem "allgemeinen" Fall $x^2 + ax = b$. Gib auch für diesen Fall das Flussdiagramm an.

AL-KHWARIZMI
AL-KITAB AL-MUHTASAR FI HISAB AL-GABR WA-L-MUQABALA

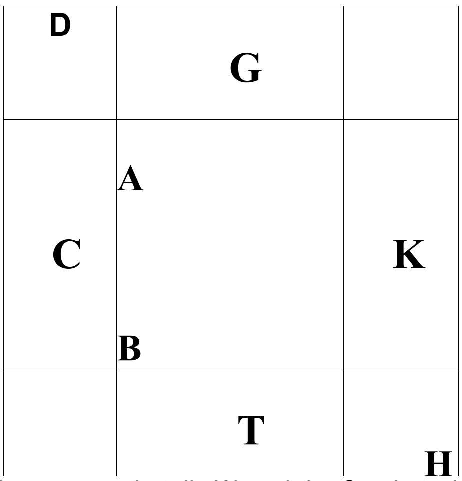
Beweis des Falles “Eine Quadratzahl und zehn ihrer Wurzeln ergeben neununddreißig Dirhem”.

Vorbemerkung:

In dem vorangegangenen Text gab Al-Khwarizmi ein mehrschrittiges Verfahren an, nach dem man das gegebene Problem lösen kann. Eine Begründung für die Einzelschritte gab er dort nicht. Sie findet sich in dem nun folgenden Text. Dabei werden nicht Term- und Äquivalenzumformungen durchgeführt, so wie wir sie aus unserem Mathematikunterricht kennen, sondern es wird eine geometrische Begründung geliefert. Dabei ist folgendes zu beachten: Die englische Übersetzung des arabischen Originals unterscheidet zwischen *square* und *quadrate*. Ein *square* bezeichnet eine durch Quadrieren (der zugehörigen Wurzel) entstandene Zahl, ein *quadrate* hingegen ist das Flächenobjekt Quadrat. In der folgenden Übersetzung wird daher sprachlich etwas umständlich durchweg von *Quadratzahl* und *Quadratfläche* gesprochen. Der Ausdruck *Quadrat* aus dem ersten Text müsste in diesem Sinne präziser *Quadratzahl* heißen.

Beweis 1:

Die Figur, die diesen Fall erklärt, ist eine Quadratfläche, deren Seiten unbekannt sind. Sie repräsentiert die Quadratzahl, die oder deren Wurzel du bestimmen willst. Das ist die Figur A B *(Figur 1)*, von der jede Seite als eine ihrer Wurzeln aufgefasst werden kann; und wenn du eine dieser Seiten mit irgend einer Zahl multiplizierst, dann kann der Wert dieser Zahl als die Anzahl der Wurzeln angesehen werden, die zu der Quadratzahl hinzugefügt werden.



Figur 1

Jede Seite der Quadratfläche repräsentiert die Wurzel der Quadratzahl; und wie in dem Beispiel die Wurzeln mit der Quadratzahl verknüpft wurden, so können wir ein Viertel von zehn, also zweieinhalb, nehmen und dies mit jeder der vier Seiten der Figur kombinieren. Auf diese Weise wird die ursprüngliche Quadratfläche A B mit vier neuen Parallelogrammen kombiniert, von denen jedes eine Seite des Quadrates als seine Länge hat und die Zahl zweieinhalb als seine Breite. Das sind die Parallelogramme C, G, T und K.

Wir haben nun eine Quadratfläche mit vier gleichen, jedoch unbekannten Seiten. Allerdings fehlt in jeder Ecke ein quadratisches Stück von zweieinhalb multipliziert mit zweieinhalb. Um dieses Fehlen auszugleichen und die Quadratfläche zu vervollständigen, müssen wir zu dem, was wir schon haben, viermal die Quadratzahl von zweieinhalb hinzufügen, d.h. fünfundzwanzig. Wir wissen (aufgrund der Aufgabenstellung), dass die erste Figur, nämlich die Quadratfläche, welche die Quadratzahl darstellt, zusammen mit den vier angefügten Parallelogrammen, welche die zehn Wurzeln repräsentieren, die Zahl neununddreißig ergeben. Wenn wir nun hierzu fünfundzwanzig addieren, was den vier Quadraten in den Ecken der Figur A B, durch welche die große Figur D H vervollständigt wird, entspricht, dann wissen wir, dass dies zusammen vierundsechzig macht. Eine Seite dieser großen Quadratfläche ist ihre Wurzel, d.h. acht. Wenn wir zweimal ein Viertel von zehn, also fünf, von acht subtrahieren, d.h. von den Enden der Seiten der großen Quadratfläche D H, dann wird der Rest dieser Seite drei sein; und das ist die Wurzel der Quadratzahl bzw. die Seite der ursprünglichen Figur A B.

Es sollte beachtet werden, dass wir die Anzahl der Wurzeln halbiert und diese Hälfte, multipliziert mit sich selbst, zu der Zahl neununddreißig hinzugefügt haben, um die große Figur in ihren vier Ecken zu vervollständigen. Denn ein Viertel einer beliebigen Zahl, multipliziert erst mit sich selbst und dann mit vier, ist gleich dem Produkt der Hälfte jener Zahl und sich selbst. Dementsprechend haben wir nur die Hälfte der Wurzeln mit sich selbst multipliziert, anstatt ein Viertel erst mit sich selbst und dann mit vier zu multiplizieren.

Aufgaben:

1. Lies die Vorbemerkung und den Beweis 1 aufmerksam durch. Achte darauf, welche Textstellen sich auf die geometrische Veranschaulichung beziehen und welche auf Rechnungen.

2. Markiere in der Zeichnung *(Figur 1)*, welche Schritte Al-Khwarizmi jeweils durchführt.

3. Vergleiche diesen Beweis mit dem Flussdiagramm, das du zu dem Text mit der Aufgabenstellung angefertigt hast. Ordne die jeweiligen Teile einander zu.

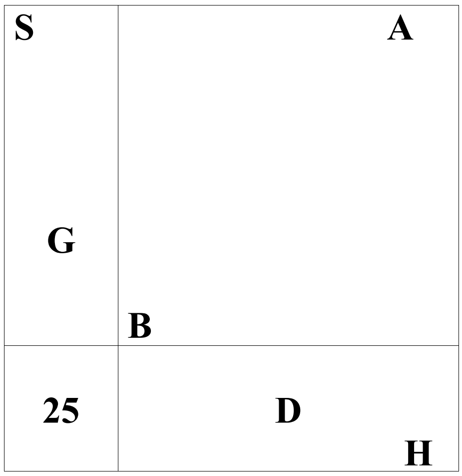
4. Erläutere den letzten Absatz sowohl geometrisch im Sinne Al-Khwarizmis als auch in unserem modern-algebraischen Sinn.

AL-KHWARIZMI
AL-KITAB AL-MUHTASAR FI HISAB AL-GABR WA-L-MUQABALA

Beweis des Falles “Eine Quadratzahl und zehn ihrer Wurzeln ergeben neununddreißig Dirhem”.

2. Beweis

Wir gehen aus von der Quadratfläche A B, welche die Quadratzahl repräsentiert. *(Figur 2).* Es ist als nächstes unsere Aufgabe, zu diesem ihre zehn Wurzeln hinzuzufügen. Zu diesem Zweck halbieren wir die zehn, so dass es fünf werden, und konstruieren zwei Vierecke auf zwei Seiten der Quadratfläche A B, nämlich G und D. Ihre Länge ist jeweils fünf, als Hälfte der zehn Wurzeln, während die Breite jeweils gleich ist zu einer Seite des Quadrates A B. Nun bleibt ein Quadrat übrig gegenüber der Ecke des Quadrates A B. Dieses ist gleich fünf multipliziert mit fünf. Diese fünf ist die Hälfte der Anzahl der Wurzeln, die wir zu jeder der zwei Seiten des ersten Quadrates hinzugefügt haben.



Figur 2

Nun wissen wir aber, dass die erste Quadratfläche, welche die Quadratzahl darstellt, und die beiden Vierecke an seinen Seiten, welche die zehn Wurzeln sind [darstellen?], zusammen neununddreißig ergeben. Um das große Quadrat zu vervollständigen, benötigt man nur eine Quadratzahl von fünf multipliziert mit fünf, oder fünfundzwanzig. Dies fügen wir zu neununddreißig hinzu, um das große Quadrat S H zu vervollständigen. Wir ziehen die Wurzel, acht, welche eine der Seiten des großen Vierecks ist. Subtrahieren wir hiervon dieselbe Anzahl, die wir vorher addiert haben, nämlich fünf, so erhalten wir drei als Rest. Dies ist die Seite des Vierecks A B, welches die Quadratzahl repräsentiert; es ist die Wurzel dieser Quadratzahl, und die Quadratzahl selbst ist neun.

Auswertung der Geschichtskärtchen

I Alle SchülerInnen teilen sich in zwei gleich große Gruppen, genannt A und C.

II A und C tauschen ihre Kärtchen, sodass in A alle Kärtchen zur arabischen Geschichte und in C alle Kärtchen zur christlichen Geschichte landen.

III A teilt sich in drei Untergruppen A_1 – A_3, C ebenso.

IV Alle Untergruppen erstellen jeweils eine Liste. Jeder schreibt für seine eigenen Unterlagen mit.

V A_1 – A_3 tauschen untereinander Vertreter aus. Die Listen werden dann miteinander verglichen und gegebenfalls ergänzt. C_1 – C_3 verfahren genauso.

VI A_1 und C_1 legen ihre Kärtchen in der gefundenen Reihenfolge auf das Packpapier. Die Kärtchen werden noch nicht festgeklebt. Die anderen Gruppen kontrollieren und korrigieren/ergänzen die Zeitleiste soweit nötig.

MOHAMMED BEN MUSA
KITAB AL-MUQTASAR FI HISAB AL-GABR WA L-MUQABALA

Kurzgefasstes Buch über das Rechnen durch Vervollständigen und Ausgleichen

Vorwort

Im Namen des gnädigen und barmherzigen Gottes!

Dieses Werk wurde von Mohammed Ben Musa, der aus der Stadt Khowarezm stammt, geschrieben. Er beginnt es so:

Gelobt sei Gott für Seine Großmut denen gegenüber, die sich durch ihre tugendhaften Taten um das verdient gemacht haben, was Er Seinen Ihn anbetenden Geschöpfen vorschreibt. Drücken wir Ihm unseren Dank aus und erweisen uns der Fortdauer Seiner Barmherzigkeit würdig. Er bewahre uns vor dem Wandel. Wir anerkennen Seine Kraft, beugen uns vor Seiner Macht und verehren Seine Größe!

Er sandte Mohammed - auf dem der Segen Gottes ruhen möge! - mit der Mission eines Propheten, lange nachdem ein Bote von oben erschienen war, als die Gerechtigkeit vernachlässigt und der wahre Weg des Lebens vergeblich gesucht wurde. Durch Ihn heilte er die Blindheit, und durch Ihn wurden wir vor dem Verderben gerettet, und durch Ihn wuchs, was vorher klein war, und durch Ihn wurde gesammelt, was vorher zerstreut war. Gepriesen sei Gott, unser Herr! Möge Sein Ruhm wachsen, und mögen all Seine Namen geheiligt werden - neben Ihm gibt es keinen Gott; und möge Sein Segen ruhen auf Mohammed, dem Propheten, und auf seinen Nachkommen!

Die Gelehrten vergangener Zeiten, die aus Ländern kamen, die längst nicht mehr existieren, waren unentwegt damit beschäftigt, Bücher zu schreiben über die verschiedenen Bereiche der Wissenschaften und die unterschiedlichen Zweige des Wissens. Sie dachten an diejenigen, die nach ihnen kommen würden, und hofften auf einen ihren Fähigkeiten angemessenen Lohn. Sie hofften zuversichtlich, dass ihre Anstrengung mit Anerkennung, Aufmerksamkeit und Andenken belohnt würde. Bescheiden, wie sie waren – bescheiden im Vergleich zu den Strapazen, die sie erleiden mussten, und den Schwierigkeiten, auf die sie bei der Enthüllung der Geheimnisse und Rätsel der Wissenschaften trafen - begnügten sie sich mit nur kleinen Lobpreisungen.

Einige schufen Wissen, das vor ihnen nicht bekannt war, und hinterließen es der Nachwelt. Andere beschäftigten sich mit den ungelösten Schwierigkeiten in den Arbeiten ihrer Vorgänger, und noch andere bestimmten die besten Untersuchungsmethoden oder machten den Zugang zur Wissenschaft leichter oder brachten ihn zumindest in greifbare Nähe. Andere wiederum entdeckten Fehler in vorangegangenen Arbeiten ihrer Gelehrtenkollegen, ordneten, was Verwirrung schuf, berichtigten, was fehlerhaft war, ohne Arroganz und Hochmut.

Die Vorliebe für die Wissenschaften, für die Gott den Imam al Mamun, den Führer der Gläubigen, berühmt gemacht hat (neben dem Kalifat, dass Er ihm gewährt hat durch rechtmäßige Nachfolge, durch das Gewand, welches Er ihm hat anlegen lassen, und durch die Würde, mit der Er ihn schmückt), die Freundlichkeit und das gönnerhafte Wesen, welches er gegenüber den Gelehrten zeigt, die Bereitschaft, mit der er sie schützt und unterstützt bei der Aufklärung von Unbekanntem und der Beseitigung von Schwierigkeiten – all dies hat mich ermutigt, ein kurzgefasstes Rechenbuch zu schreiben über die Regeln der Ergänzung und Ausgleichung, beschränkt auf die gebräuchlichsten und nützlichsten Rechenvorschriften, die die Leute fortwährend benötigen in Fällen von Erbschaften, Vermächtnissen, Teilungen, Prozessen und Handelsgeschäften, sowie bei allem, bei dem sie miteinander ins Geschäft kommen, von der Ausmessung der Ländereien, dem Bau von Kanälen, der Geometrie und anderen Dingen verschiedenster Art und Weise, welche beteiligt sind.

Dabei vertraue ich auf die Güte meiner Absicht und hoffe, dass die Gelehrten es belohnen werden, so dass ich durch ihre Gebete die Auszeichnung des göttlichen Dankes erlange. Als Belohnung dafür mögen ihnen die auserlesenen Segnungen und die reichliche Freigebigkeit Gottes zugute kommen! Mein Vertrauen liegt in Gott, in diesen wie in allen Dingen, und an Ihn glaube ich. Er ist der Herr des erhabenen Thrones. Möge Sein Segen herabkommen auf alle Propheten und himmlischen Boten!

Aufgaben:

1. Lies den Text aufmerksam durch.

2. Teile den Text in größere Sinnabschnitte. Markiere die Stellen, an denen Einschnitte vorliegen.

3. Wovon handeln die einzelnen Abschnitte? Was will Mohammed Ben Musa mit dem Text oder mit einzelnen Abschnitten erreichen?

4. Wie würde sich das Vorwort eines modernen „Rechenbuches“ von dem vorliegenden Vorwort unterscheiden? Was wäre wohl gleich?

Klasse 9a **2. Mathematikarbeit** **2 UStd.** **2./ 7.12.98**

Aufgabe 1:

Die folgende Aufgabe stammt aus dem im Unterricht behandelten Buch von Al-Khwarizmi. In ihr wird ein weiterer Fall von quadratischen Gleichungen untersucht.

> Nimm das Beispiel: „Ein Quadrat und Einundzwanzig in Zahlen seien gleich zehn Wurzeln desselben Quadrats". Man kann auch fragen, wie groß ein Quadrat sein muss, welches, wenn man einundzwanzig Dirhem hinzufügt, genauso groß wird wie zehn Wurzeln desselben Quadrats. Lösung: Halbiere die Anzahl der Wurzeln; diese Hälfte ist fünf. Multipliziere dies mit sich selbst; das Produkt ist fünfundzwanzig. Subtrahiere hiervon die einundzwanzig, welche mit den Quadrat verbunden sind; der Rest ist vier. Ziehe daraus die Wurzel; das ist zwei. Subtrahiere dies von der Hälfte der Wurzeln, also fünf; der Rest ist drei. Dies ist die Wurzel des geforderten Quadrats, und das Quadrat ist neun. Oder du addierst die Hälfte der Wurzeln; die Summe ist sieben. Dies ist die Wurzel des gesuchten Quadrats, und das Quadrat selbst ist neunundvierzig.
>
> [...] Falls du in einem Fall der hier vorliegenden Art die Anzahl der Wurzeln halbiert und diese Hälfte mit sich selbst multipliziert hast, und falls dieses Produkt kleiner ist als die Anzahl der Dirhem, die mit dem Quadrat verknüpft sind, dann ist der Fall unmöglich. Aber wenn das Produkt den Dirhem genau entspricht, dann ist die Wurzel des Quadrats gleich der Hälfte der Wurzeln selber, also ohne Addition oder Subtraktion.

a) Schreibe Al-Khwarizmis Aufgabe aus Zeile 1-2 in der uns vertrauten, modernen algebraischen Weise.

b) Schreibe die einzelnen Schritte von Al-Khwarizmis Lösungsweg als Flussdiagramm auf. Gib jeweils die mathematischen Operationen an, die bei den einzelnen Schritten angewendet werden.

c) Wende Al-Khwarizmis Verfahren auf die Gleichung $x^2 + 11 = 12x$ an. Schreibe den Weg genauso auf wie in Teilaufgabe **b).**

d) In den Zeilen 14-19 geht Al-Khwarizmi auf zwei Sonderfälle ein. Erläutere <u>beide</u> Sonderfälle an jeweils einem Beispiel. Zeige anschließend den Zusammenhang mit der uns bekannten pq-Formel auf.

e) Veranschauliche Al-Khwarizmis Ausgangsproblem (Z.1-2) anhand einer geometrischen Darstellung.

f) Wie bei dem im Unterricht behandelten Fall gibt Al-Khwarizmi auch für den vorliegenden Fall eine geometrische Begründung seines Lösungsweges. Versuche selbst, eine solche Begründung zu finden, indem du das Flussdiagramm aus **b)** auf deine Zeichnung aus **e)** anwendest.

Aufgabe 2:

Berechne die Lösungsmengen. Benutze dabei quadratische Ergänzungen!

a) $\frac{1}{2}x^2 - 3 = \frac{1}{2}x$ **b)** $2x^2 + 5x = x^2 - 6{,}25$

Aufgabe 3:

Berechne die Lösungsmengen. Benutze dabei die pq-Formel!

a) $2x^2 + 2x - 16 = 2x - 8$ **b)** $-\frac{1}{4}x^2 - 2 = x$

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Gleichung $x^2 + 15 = t \cdot x$. Für welche Werte von t hat diese Gleichung genau zwei, genau eine bzw. keine Lösung?

Aufgabe 5:

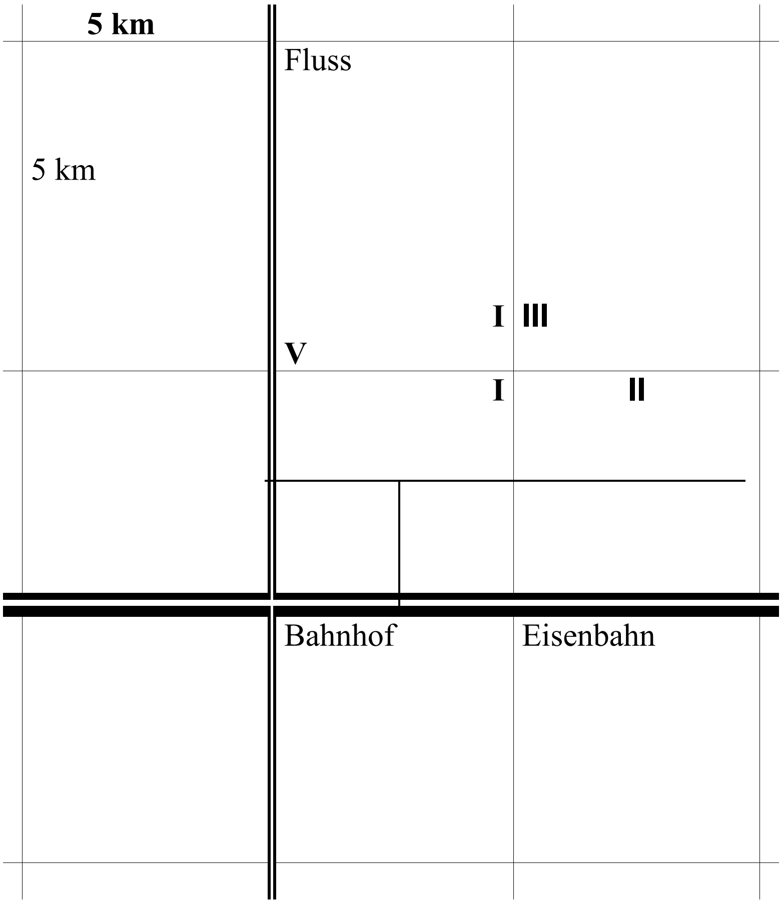
Fusionsfieber in der Weltwirtschaft: Um den Zusammenschluss der beiden führenden Hersteller von Hochleistungspömpeln, Plopponia und Saugmaxe, zu feiern, lädt der Vorstand zu einem Sektempfang. Dabei stößt jeder mit jedem genau einmal an. Je zwei Personen produzieren also genau ein *Kling*.

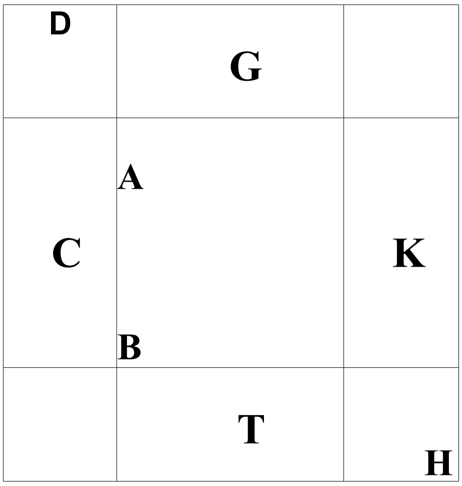
a) Wenn n Personen auf dem Empfang sind, dann produzieren sie genau $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ *Klings*. Welche Anzahl von *Klings* ergibt sich aus der Formel, wenn drei Gäste anwesend sind?

b) Auf dem Empfang werden genau 2278 *Klings* produziert. Wie viele Gäste waren anwesend?

c) Begründe die Formel aus Teilaufgabe a).

Viel Erfolg! Rc


5 km
Fluss
5 km
I III
V
I II
Bahnhof
Eisenbahn


D
G
A
C
K
B
T
H

23 Anhang XI: Graphik zum zweiten Beweis (§17)

Diese Graphik taucht so nicht in den ausgeteilten Arbeitsblättern auf. Sie ist zwar im Originalmanuskript von AK enthalten, in dieser Sequenz wird die Figur jedoch von den Schülern im Unterricht eigenständig erarbeitet – im Gegensatz zur 1. Beweisfigur, die als Originalzitat geliefert wird.